BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI SỐ 10



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRẦN VĂN HẠO (Tổng Chủ biên) - VŨ TUẤN (Chủ biên)
DOÃN MINH CƯỜNG - ĐỖ MẠNH HÙNG - NGUYỄN TIẾN TÀI

ĐẠI SỐ 10

(Tái bản lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NHỮNG ĐIỀU CẦN CHÚ Ý KHI SỬ DỤNG SÁCH GIÁO KHOA

1. Những kí hiệu thường dùng

 : Phần hoạt động của học sinh.

2. Về trình bày, sách giáo khoa có hai mảng : mảng chính và mảng phụ.

 Mảng chính gồm các khái niệm, định nghĩa, định lí, tính chất,... và thường được đóng khung hoặc có đường viền ở mép. Mảng này được in thụt vào trong.

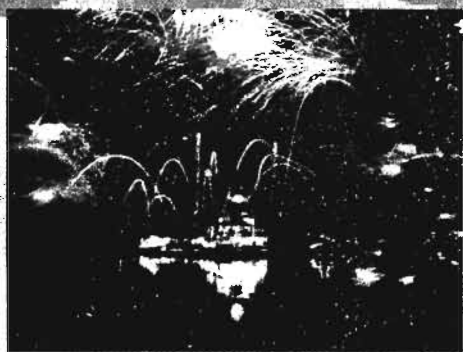
Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng Biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **NGUYỄN KIM THƯ – LÊ THỊ THANH HẰNG**
Biên tập tái bản : **LÊ THỊ THANH HẰNG**
Biên tập kĩ thuật : **NGUYỄN THỊ THANH HẢI**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **LÊ THỊ THANH HẰNG**
Chế bản : **CÔNG TY CP THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

ĐẠI SỐ 10
Mã số : CH001T0
Số đăng kí KHXB : 01-2010/CXB/550-1485/GD

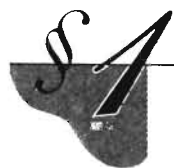
In 100.000 cuốn, (ST) khổ 17 x 24cm, tại Công ty cổ phần in - vật tư Ba Đình Thanh Hóa. Số in: 59. In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2010.

Chương I MỆNH ĐỀ. TẬP HỢP



MỆNH ĐỀ. TẬP HỢP

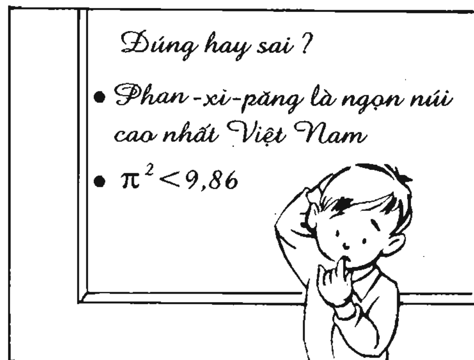
Chương này củng cố, mở rộng hiểu biết của học sinh về Lí thuyết tập hợp đã được học ở các lớp dưới ; cung cấp các kiến thức ban đầu về lôgic và các khái niệm số gần đúng, sai số tạo cơ sở để học tập tốt các chương sau ; hình thành cho học sinh khả năng suy luận có lí, khả năng tiếp nhận, biểu đạt các vấn đề một cách chính xác.



MỆNH ĐỀ

I – MỆNH ĐỀ. MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

1. Mệnh đề





 1

Nhìn vào hai bức tranh ở trên, hãy đọc và so sánh các câu ở bên trái và bên phải.

Các câu ở bên trái là những khẳng định có tính đúng hoặc sai, còn các câu ở bên phải không thể nói là đúng hay sai. Các câu ở bên trái là những *mệnh đề*, còn các câu ở bên phải không là những mệnh đề.

Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.
Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

 2

Nêu ví dụ về những câu là mệnh đề và những câu không là mệnh đề.

2. Mệnh đề chứa biến

Xét câu "n chia hết cho 3".

Ta chưa khẳng định được tính đúng sai của câu này. Tuy nhiên, với mỗi giá trị của n thuộc tập số nguyên, câu này cho ta một mệnh đề. Chẳng hạn

Với $n = 4$ ta được mệnh đề "4 chia hết cho 3" (sai).

Với $n = 15$ ta được mệnh đề "15 chia hết cho 3" (đúng).

Xét câu "$2 + n = 5$".

Cũng như trên, ta thấy với mỗi giá trị của n thuộc tập số nguyên ta được một mệnh đề. Chẳng hạn

Với $n = 1$ ta được mệnh đề "$2 + 1 = 5$" (sai).

Với $n = 3$ ta được mệnh đề "$2 + 3 = 5$" (đúng).

Hai câu trên là những ví dụ về ***mệnh đề chứa biến****.*


3

Xét câu "$x > 3$". Hãy tìm hai giá trị thực của x để từ câu đã cho, nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

II – PHỦ ĐỊNH CỦA MỘT MỆNH ĐỀ



Ví dụ 1. Nam và Minh tranh luận về loài dơi.

Nam nói "Dơi là một loài chim".

Minh phủ định "Dơi không phải là một loài chim".



Để phủ định một mệnh đề, ta thêm (hoặc bớt) từ "không" (hoặc "không phải") vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

Kí hiệu mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$, ta có

$\overline{P}$ đúng khi P sai.

$\overline{P}$ sai khi P đúng.

Ví dụ 2

P : "3 là một số nguyên tố" ;

$\overline{P}$: "3 không phải là một số nguyên tố".

Q : "7 không chia hết cho 5" ;

$\overline{Q}$: "7 chia hết cho 5".



4

Hãy phủ định các mệnh đề sau.

P : "π là một số hữu tỉ" ;

Q : "Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh thứ ba".

Xét tính đúng sai của các mệnh đề trên và mệnh đề phủ định của chúng.

III – MỆNH ĐỀ KÉO THEO



Ví dụ 3. Ai cũng biết "Nếu Trái Đất không có nước thì không có sự sống".

Câu nói trên là một mệnh đề dạng "Nếu P thì Q", ở đây P là mệnh đề "Trái Đất không có nước", Q là mệnh đề "(Trái Đất) không có sự sống".

*Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là **mệnh đề kéo theo**, và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.*

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là "P kéo theo Q" hoặc "Từ P suy ra Q".



5

Từ các mệnh đề

P : "Gió mùa Đông Bắc về"

Q : "Trời trở lạnh"

hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Như vậy, ta chỉ cần xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ khi P đúng. Khi đó, nếu Q đúng thì $P \Rightarrow Q$ đúng, nếu Q sai thì $P \Rightarrow Q$ sai.

Ví dụ 4

Mệnh đề "$-3 < -2 \Rightarrow (-3)^2 < (-2)^2$" sai.

Mệnh đề "$\sqrt{3} < 2 \Rightarrow 3 < 4$" đúng.

Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường có dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói

P là giả thiết, Q là kết luận của định lí, hoặc

*P là **điều kiện đủ** để có Q, hoặc*

*Q là **điều kiện cần** để có P.*


6

Cho tam giác ABC. Từ các mệnh đề

P : "Tam giác ABC có hai góc bằng 60^{o}"

Q : "ABC là một tam giác đều".

Hãy phát biểu định lí $P \Rightarrow Q$. Nêu giả thiết, kết luận và phát biểu lại định lí này dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

IV – MỆNH ĐỀ ĐẢO – HAI MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG


7

Cho tam giác ABC. Xét các mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ sau

a) Nếu ABC là một tam giác đều thì ABC là một tam giác cân.

b) Nếu ABC là một tam giác đều thì ABC là một tam giác cân và có một góc bằng 60^{o}.

Hãy phát biểu các mệnh đề $Q \Rightarrow P$ tương ứng và xét tính đúng sai của chúng.

> *Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.*

Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

> *Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng ta nói P và Q là **hai mệnh đề tương đương**.*
>
> *Khi đó ta kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$ và đọc là*
>
> *P tương đương Q, hoặc*
>
> *P là điều kiện cần và đủ để có Q, hoặc*
>
> *P khi và chỉ khi Q.*

Ví dụ 5. a) Tam giác ABC cân và có một góc 60^{o} là điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều.

b) Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.

V – KÍ HIỆU ∀ VÀ ∃

Ví dụ 6. Câu "Bình phương của mọi số thực đều lớn hơn hoặc bằng 0" là một mệnh đề. Có thể viết mệnh đề này như sau

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \text{ hay } x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kí hiệu ∀ đọc là "với mọi".


8
Phát biểu thành lời mệnh đề sau

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n + 1 > n.$$

Mệnh đề này đúng hay sai ?

Ví dụ 7. Câu "Có một số nguyên nhỏ hơn 0" là một mệnh đề. Có thể viết mệnh đề này như sau

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n < 0.$$

Kí hiệu $\exists$ đọc là "có một" (tồn tại một) hay "có ít nhất một" (tồn tại ít nhất một).


9
Phát biểu thành lời mệnh đề sau

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = x.$$

Mệnh đề này đúng hay sai ?

Ví dụ 8

Nam nói "Mọi số thực đều có bình phương khác 1".

Minh phủ định "Không đúng. Có một số thực mà bình phương của nó bằng 1, chẳng hạn số 1".

Như vậy, phủ định của mệnh đề

$$P : \text{"}\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1\text{"},$$

là mệnh đề

$$\overline{P} : \text{"}\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\text{"}.$$


10
Hãy phát biểu mệnh đề phủ định của mệnh đề sau

P : "Mọi động vật đều di chuyển được".

Ví dụ 9

Nam nói "Có một số tự nhiên n mà $2n = 1$".

Minh phản bác "Không đúng. Với mọi số tự nhiên n, đều có $2n \neq 1$".

Như vậy, phủ định của mệnh đề

$$P : \text{"}\exists n \in \mathbb{N} : 2n = 1\text{"}$$

là mệnh đề

$$\overline{P} : "\forall n \in \mathbb{N} : 2n \neq 1".$$



11

Hãy phát biểu mệnh đề phủ định của mệnh đề sau

P : "Có một học sinh của lớp không thích học môn Toán".

Bài tập

1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến ?

a) $3 + 2 = 7$;

b) $4 + x = 3$;

c) $x + y > 1$;

d) $2 - \sqrt{5} < 0$.

2. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau và phát biểu mệnh đề phủ định của nó.

a) 1794 chia hết cho 3 ;

b) $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ ;

c) $\pi < 3{,}15$;

d) $|-125| \leq 0$.

3. Cho các mệnh đề kéo theo

Nếu *a* và *b* cùng chia hết cho *c* thì *a* + *b* chia hết cho *c* (*a*, *b*, *c* là những số nguyên).

Các số nguyên có tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 5.

Tam giác cân có hai đường trung tuyến bằng nhau.

Hai tam giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.

a) Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mỗi mệnh đề trên.

b) Phát biểu mỗi mệnh đề trên, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện đủ".

c) Phát biểu mỗi mệnh đề trên, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần".

4. Phát biểu mỗi mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần và đủ"

a) Một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 và ngược lại.

b) Một hình bình hành có các đường chéo vuông góc là một hình thoi và ngược lại.

c) Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi biệt thức của nó dương.

5. Dùng kí hiệu ∀, ∃ để viết các mệnh đề sau

a) Mọi số nhân với 1 đều bằng chính nó ;

b) Có một số cộng với chính nó bằng 0 ;

c) Mọi số cộng với số đối của nó đều bằng 0.

6. Phát biểu thành lời mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$;

b) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$;

c) $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 2n$;

d) $\exists x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{x}$.

7. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó

a) $\forall n \in \mathbb{N}$: n chia hết cho n ;

b) $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$;

c) $\forall x \in \mathbb{R} : x < x + 1$;

d) $\exists x \in \mathbb{R} : 3x = x^2 + 1$.

§2 TẬP HỢP

I – KHÁI NIỆM TẬP HỢP

1. Tập hợp và phần tử



1

Nêu ví dụ về tập hợp.

Dùng các kí hiệu ∈ và ∉ để viết các mệnh đề sau.

a) 3 là một số nguyên ;

b) $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ.

Tập hợp (còn gọi là tập) là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.

Giả sử đã cho tập hợp A. Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$ (đọc là a thuộc A). Để chỉ a không phải là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là a không thuộc A).

2. Cách xác định tập hợp



2

Liệt kê các phần tử của tập hợp các ước nguyên dương của 30.

Khi liệt kê các phần tử của một tập hợp, ta viết các phần tử của nó trong hai dấu móc {.........}, ví dụ $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.



3

Tập hợp B các nghiệm của phương trình $2x^2 - 5x + 3 = 0$ được viết là

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}.$$

Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp B.

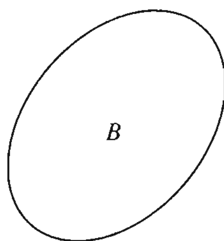
Một tập hợp có thể được xác định bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Vậy ta có thể xác định một tập hợp bằng một trong hai cách sau

a) Liệt kê các phần tử của nó ;

b) Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Người ta thường minh hoạ tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường kín, gọi là biểu đồ Ven như hình 1.



Hình 1

3. Tập hợp rỗng



4

Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}.$$

Phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ không có nghiệm. Ta nói tập hợp các nghiệm của phương trình này là *tập hợp rỗng*.

> ***Tập hợp rỗng**, kí hiệu là $\varnothing$, là tập hợp không chứa phần tử nào.*

Nếu A không phải là tập hợp rỗng thì A chứa ít nhất một phần tử.

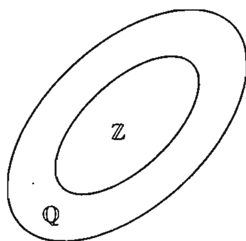
$$A \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists x : x \in A.$$

II – TẬP HỢP CON



5

Biểu đồ minh hoạ trong hình 2 nói gì về quan hệ giữa tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ và tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$? Có thể nói mỗi số nguyên là một số hữu tỉ hay không ?

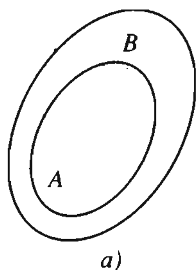


Hình 2

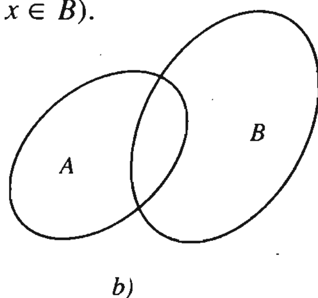
*Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một **tập hợp con** của B và viết $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B).*

Thay cho $A \subset B$, ta cũng viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A hoặc B bao hàm A) (h.3a). Như vậy

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B).$$



a)



b)

Hình 3

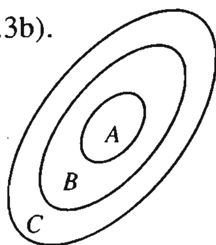
Nếu A không phải là một tập con của B, ta viết $A \not\subset B$. (h.3b).

Ta có các tính chất sau

a) $A \subset A$ *với mọi tập hợp* A ;

b) *Nếu* $A \subset B$ *và* $B \subset C$ *thì* $A \subset C$ (h.4) ;

c) $\varnothing \subset A$ *với mọi tập hợp* A.



Hình 4

III – TẬP HỢP BẰNG NHAU


6
Xét hai tập hợp

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội của 4 và 6$\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội của 12$\}$.

Hãy kiểm tra các kết luận sau

a) $A \subset B$;   b) $B \subset A$.

Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói tập hợp A bằng tập hợp B và viết là $A = B$.

Như vậy

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Bài tập

1. a) Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20$ và x chia hết cho $3\}$.

Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp A.

b) Cho tập hợp $B = \{2, 6, 12, 20, 30\}$.

Hãy xác định B bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

c) Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp các học sinh lớp em cao dưới 1m60.

2. Trong hai tập hợp A và B dưới đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại ? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không ?

a) A là tập hợp các hình vuông

B là tập hợp các hình thoi.

b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là một ước chung của 24 và $30\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là một ước của $6\}$.

3. Tìm tất cả các tập con của tập hợp sau

a) $A = \{a, b\}$;

b) $B = \{0, 1, 2\}$.

§3 CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

I – GIAO CỦA HAI TẬP HỢP



1 Cho

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là ước của $12\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là ước của $18\}$.

a) Liệt kê các phần tử của A và của B ;

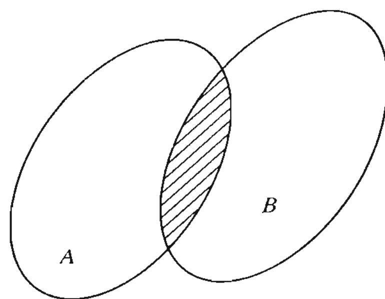
b) Liệt kê các phần tử của tập hợp C các ước chung của 12 và 18.

*Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là **giao** của A và B.*

Kí hiệu $C = A \cap B$ (phần gạch chéo trong hình 5). Vậy

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$$



$A \cap B$

Hình 5

II – HỢP CỦA HAI TẬP HỢP

 **2**

Giả sử A, B lần lượt là tập hợp các học sinh giỏi Toán, giỏi Văn của lớp 10E. Biết

A = {Minh, Nam, Lan, Hồng, Nguyệt} ;

B = {Cường, Lan, Dũng, Hồng, Tuyết, Lê}.

(Các học sinh trong lớp không trùng tên nhau.)

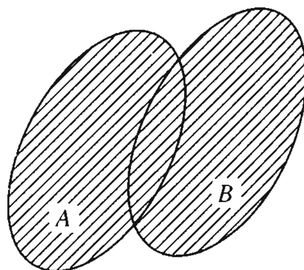
Gọi C là tập hợp đội tuyển thi học sinh giỏi của lớp gồm các bạn giỏi Toán hoặc giỏi Văn. Hãy xác định tập hợp C.

> *Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là **hợp** của A và B.*

Kí hiệu $C = A \cup B$ (phần gạch chéo trong hình 6). Vậy

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B. \end{array}\right.$$



$A \cup B$

Hình 6

III – HIỆU VÀ PHẦN BÙ CỦA HAI TẬP HỢP

 **3**

Giả sử tập hợp A các học sinh giỏi của lớp 10E là

A = {An, Minh, Bảo, Cường, Vinh, Hoa, Lan, Tuệ, Quý}.

Tập hợp B các học sinh của tổ 1 lớp 10E là

B = {An, Hùng, Tuấn, Vinh, Lê, Tâm, Tuệ, Quý}.

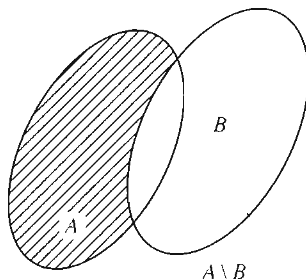
Xác định tập hợp C các học sinh giỏi của lớp 10E không thuộc tổ 1.

> *Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là **hiệu** của A và B.*

Kí hiệu $C = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình 7). Vậy

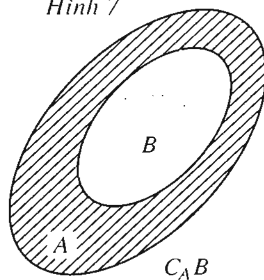
$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ và $x \notin B\}$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B. \end{cases}$$



Hình 7

> Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là **phần bù** của B trong A, kí hiệu $C_A B$ (phần gạch chéo trong hình 8).

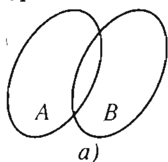


Hình 8

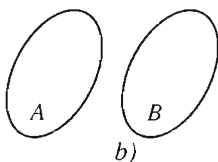
Bài tập

1. Kí hiệu $\mathscr{A}$ là tập hợp các chữ cái trong câu "CÓ CHÍ THÌ NÊN", $\mathscr{B}$ là tập hợp các chữ cái trong câu "CÓ CÔNG MÀI SẮT CÓ NGÀY NÊN KIM". Hãy xác định $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$, $\mathscr{B} \setminus \mathscr{A}$.

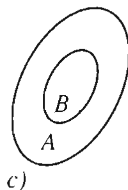
2. Vẽ lại và gạch chéo các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ (h. 9) trong các trường hợp sau.



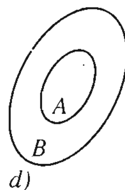
a)



b)



c)



d)

Hình 9

3. Trong số 45 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 20 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi

a) Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt ?

b) Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt ?

4. Cho tập hợp A, hãy xác định $A \cap A$, $A \cup A$, $A \cap \varnothing$, $A \cup \varnothing$, $C_A A$, $C_A \varnothing$.

§4 CÁC TẬP HỢP SỐ

I – CÁC TẬP HỢP SỐ ĐÃ HỌC


Vẽ biểu đồ minh hoạ quan hệ bao hàm của các tập hợp số đã học.

1. Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\};$$
$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}.$$

2. Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Các số $-1, -2, -3, ...$ là các số nguyên âm.

Vậy $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm.

3. Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$

Số hữu tỉ biểu diễn được dưới dạng một phân số $\frac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ biểu diễn cùng một số hữu tỉ khi và chỉ khi $ad = bc$.

Số hữu tỉ còn biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.

Ví dụ 1. $\frac{5}{4} = 1,25$

$\frac{5}{12} = 0,41(6).$

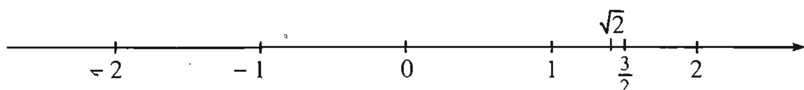
4. Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$

Tập hợp các số thực gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ.

Ví dụ 2. $\alpha = 0,101101110\ldots$ (số chữ số 1 sau mỗi chữ số 0 tăng dần) là một số vô tỉ.

Tập hợp các số thực gồm các số hữu tỉ và các số vô tỉ.

Mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm trên trục số và ngược lại (h.10).



Hình 10

II – CÁC TẬP HỢP CON THƯỜNG DÙNG CỦA $\mathbb{R}$

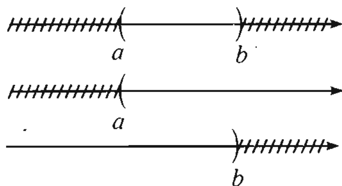
Trong toán học ta thường gặp các tập hợp con sau đây của tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ (h.11).

Khoảng

$(a\,;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

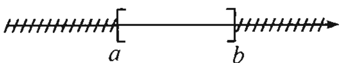
$(a\,;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$(-\infty\,;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.



Đoạn

$[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$.



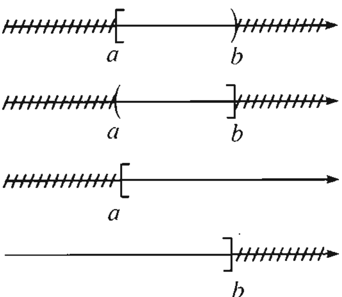
Nửa khoảng

$[a\,;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$

$(a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$

$[a\,;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$

$(-\infty\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$.



Hình 11

Kí hiệu $+\infty$ đọc là *dương vô cực* (hoặc dương vô cùng), kí hiệu $-\infty$ đọc là *âm vô cực* (hoặc âm vô cùng).

Ta có thể viết $\mathbb{R} = (-\infty ; +\infty)$ và gọi là *khoảng* $(-\infty ; +\infty)$.

Với mọi số thực x ta cũng viết $-\infty < x < +\infty$.

Bài tập

Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số

1. a) $[-3 ; 1) \cup (0 ; 4]$; b) $(0 ; 2] \cup [-1 ; 1)$;

c) $(-2 ; 15) \cup (3 ; +\infty)$; d) $\left(-1 ; \frac{4}{3}\right) \cup [-1 ; 2)$;

e) $(-\infty ; 1) \cup (-2 ; +\infty)$.

2. a) $(-12 ; 3] \cap [-1 ; 4]$; b) $(4 ; 7) \cap (-7 ; -4)$;

c) $(2 ; 3) \cap [3 ; 5)$; d) $(-\infty ; 2] \cap [-2 ; +\infty)$.

3. a) $(-2 ; 3) \setminus (1 ; 5)$; b) $(-2 ; 3) \setminus [1 ; 5)$;

c) $\mathbb{R} \setminus (2 ; +\infty)$; d) $\mathbb{R} \setminus (-\infty ; 3]$.

BẠN CÓ BIẾT



CAN-TO



G. CAN-TO
(Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor 1845 – 1918)

Can-to là nhà toán học Đức gốc Do Thái.

Xuất phát từ việc nghiên cứu các tập hợp vô hạn và các số siêu hạn, Can-to đã đặt nền móng cho việc xây dựng Lí thuyết tập hợp.

Lí thuyết tập hợp ngày nay không những là cơ sở của toán học mà còn là nguyên nhân của việc rà soát lại toàn bộ cơ sở lôgic của toán học. Nó có một ảnh hưởng sâu sắc đến toàn bộ cấu trúc hiện đại của toán học.

Từ những năm 60 của thế kỉ XX, tập hợp được đưa vào giảng dạy trong trường phổ thông ở tất cả các nước. Vì công lao to lớn của Can-to đối với toán học, tên của ông đã được đặt cho một miệng núi lửa trên Mặt Trăng.

§5 SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

I – SỐ GẦN ĐÚNG

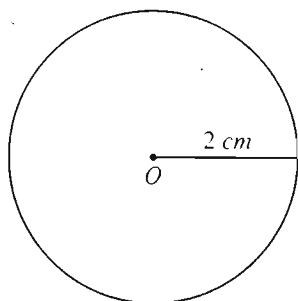
Ví dụ 1. Khi tính diện tích của hình tròn bán kính $r = 2$ cm theo công thức $S = \pi r^2$ (h.12),

Nam lấy một giá trị gần đúng của π là 3,1 và được kết quả

$$S = 3{,}1 \,.\, 4 = 12{,}4 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Minh lấy một giá trị gần đúng của π là 3,14 và được kết quả

$$S = 3{,}14 \,.\, 4 = 12{,}56 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 12

Vì $\pi = 3{,}141592653$ ... là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn, nên ta chỉ viết được gần đúng kết quả phép tính $\pi.r^2$ bằng một số thập phân hữu hạn.



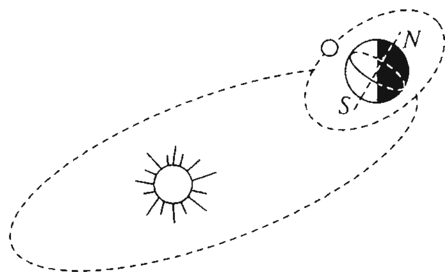
1

Khi đọc các thông tin sau em hiểu đó là các số đúng hay gần đúng ?

Bán kính đường Xích Đạo của Trái Đất là 6378 km.

Khoảng cách từ Mặt Trăng đến Trái Đất là 384 400 km.

Khoảng cách từ Mặt Trời đến Trái Đất là 148 600 000 km.



Để đo các đại lượng như bán kính đường Xích Đạo của Trái Đất, khoảng cách từ Trái Đất đến các vì sao,... người ta phải dùng các phương pháp và các dụng cụ đo đặc biệt. Kết quả của phép đo phụ thuộc vào phương pháp đo và dụng cụ được sử dụng, vì thế thường chỉ là những số gần đúng.

Trong đo đạc, tính toán ta thường chỉ nhận được các số gần đúng.

II – SAI SỐ TUYỆT ĐỐI

1. Sai số tuyệt đối của một số gần đúng

Ví dụ 2. Ta hãy xem trong hai kết quả tính diện tích hình tròn ($r = 2$ cm) của Nam ($S = 3{,}1 \,.\, 4 = 12{,}4$) và Minh ($S = 3{,}14 \,.\, 4 = 12{,}56$), kết quả nào chính xác hơn.

Ta thấy $3,1 < 3,14 < \pi$,

do đó $3,1 . 4 < 3,14 . 4 < \pi . 4$

hay $12,4 < 12,56 < S = \pi . 4$.

Như vậy, kết quả của Minh gần với kết quả đúng hơn, hay chính xác hơn.

Từ bất đẳng thức trên suy ra

$$|S - 12,56| < |S - 12,4|.$$

Ta nói kết quả của Minh có *sai số tuyệt đối* nhỏ hơn của Nam.

> *Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là* ***sai số tuyệt đối*** *của số gần đúng a.*

2. Độ chính xác của một số gần đúng

Ví dụ 3. Có thể xác định được sai số tuyệt đối của các kết quả tính diện tích hình tròn của Nam và Minh dưới dạng số thập phân không ?

Vì ta không viết được giá trị đúng của $S = \pi.4$ dưới dạng một số thập phân hữu hạn nên không thể tính được các sai số tuyệt đối đó. Tuy nhiên, ta có thể ước lượng chúng, thật vậy

$$3,1 < 3,14 < \pi < 3,15.$$

Do đó $12,4 < 12,56 < S < 12,6.$

Từ đó suy ra $|S - 12,56| < |12,6 - 12,56| = 0,04$

$|S - 12,4| < |12,6 - 12,4| = 0,2.$

Ta nói kết quả của Minh có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,04, kết quả của Nam có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,2. Ta cũng nói kết quả của Minh có độ chính xác là 0,04, kết quả của Nam có độ chính xác là 0,2.

> *Nếu $\Delta_a = |\overline{a} - a| \le d$ thì $-d \le \overline{a} - a \le d$ hay $a - d \le \overline{a} \le a + d$.*
>
> *Ta nói a là số gần đúng của $\overline{a}$ với* ***độ chính xác*** *d, và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.*

2

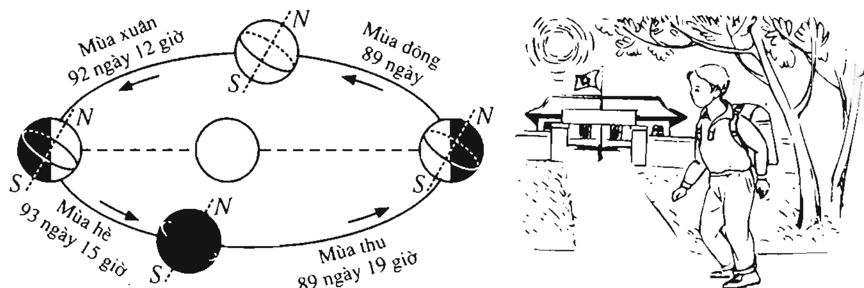
Tính đường chéo của một hình vuông có cạnh bằng 3 cm và xác định độ chính xác của kết quả tìm được. Cho biết $\sqrt{2} = 1,4142135 \ldots$.

CHÚ Ý

Sai số tuyệt đối của số gần đúng nhận được trong một phép đo đạc đôi khi không phản ánh đầy đủ tính chính xác của phép đo đó.

Ta xét ví dụ sau. Các nhà thiên văn tính được thời gian để Trái Đất quay một vòng xung quanh Mặt Trời là 365 ngày $\pm\frac{1}{4}$ ngày. Nam tính thời gian bạn đó đi từ nhà đến trường là 30 phút ± 1 phút.

Trong hai phép đo trên, phép đo nào chính xác hơn ?



Phép đo của các nhà thiên văn có sai số tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{4}$ ngày, nghĩa là 6 giờ hay 360 phút. Phép đo của Nam có sai số tuyệt đối không vượt quá 1 phút.

Thoạt nhìn, ta thấy phép đo của Nam chính xác hơn của các nhà thiên văn (so sánh 1 phút với 360 phút). Tuy nhiên, $\frac{1}{4}$ ngày hay 360 phút là độ chính xác của phép đo một chuyển động trong 365 ngày, còn 1 phút là độ chính xác của phép đo một chuyển động trong 30 phút. So sánh hai tỉ số

$$\frac{\frac{1}{4}}{365}=\frac{1}{1460}=0,0006849...$$

$$\frac{1}{30}=0,033\ldots$$

ta phải nói phép đo của các nhà thiên văn chính xác hơn nhiều.

Vì thế ngoài sai số tuyệt đối Δ_a của số gần đúng a, người ta còn xét tỉ số

$$\delta_a=\frac{\Delta_a}{|a|}.$$

δ_a được gọi là *sai số tương đối* của số gần đúng a.

III – QUY TRÒN SỐ GẦN ĐÚNG

1. Ôn tập quy tắc làm tròn số

Trong sách giáo khoa Toán 7 tập một ta đã biết quy tắc làm tròn số *đến* một hàng nào đó (gọi là hàng quy tròn) như sau

Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.

Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên, nhưng cộng thêm một đơn vị vào chữ số của hàng quy tròn.

Chẳng hạn

Số quy tròn đến hàng nghìn của $x = 2\,841\,675$ là $x \approx 2\,842\,000$, của $y = 432\,415$ là $y \approx 432\,000$.

Số quy tròn đến hàng phần trăm của $x = 12{,}4253$ là $x \approx 12{,}43$; của $y = 4{,}1521$ là $y \approx 4{,}15$.

2. Cách viết số quy tròn của số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước

Ví dụ 4. Cho số gần đúng $a = 2\,841\,275$ với độ chính xác $d = 300$. Hãy viết số quy tròn của số a.

Giải. Vì độ chính xác *đến hàng trăm* ($d = 300$) nên ta quy tròn *a đến hàng nghìn* theo quy tắc làm tròn ở trên.

Vậy số quy tròn của a là 2 841 000.

Ví dụ 5. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 3{,}1463$ biết

$$\bar{a} = 3{,}1463 \pm 0{,}001.$$

Giải. Vì độ chính xác *đến hàng phần nghìn* (độ chính xác là 0,001) nên ta quy tròn số 3,1463 *đến hàng phần trăm* theo quy tắc làm tròn ở trên.

Vậy số quy tròn của a là 3,15.



3

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng trong những trường hợp sau

a) 374529 ± 200 ;

b) $4{,}1356 \pm 0{,}001$.

Bài tập

1. Biết $\sqrt[3]{5} = 1,709975947 \ldots$

Viết gần đúng $\sqrt[3]{5}$ theo nguyên tắc làm tròn với hai, ba, bốn chữ số thập phân và ước lượng sai số tuyệt đối.

2. Chiều dài một cái cầu là $l = 1745,25$ m $\pm 0,01$ m.

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 1745,25.

3. a) Cho giá trị gần đúng của π là $a = 3,141592653589$ với độ chính xác là 10^{-10}. Hãy viết số quy tròn của a ;

b) Cho $b = 3,14$ và $c = 3,1416$ là những giá trị gần đúng của π. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối của b và c.

4. Thực hiện các phép tính sau trên máy tính bỏ túi (trong kết quả lấy 4 chữ số ở phần thập phân).

a) $3^7.\sqrt{14}$;

b) $\sqrt[3]{15}.12^4$.

Hướng dẫn cách giải câu a). Nếu dùng máy tính CASIO *fx-500 MS* ta làm như sau

Ấn [3] [^] [7] [×] [√] 14 [=]

Ấn liên tiếp phím [MODE] cho đến khi màn hình hiện ra

Fix	Sci	Norm
1	2	3

Ấn liên tiếp [1] [4] để lấy 4 chữ số ở phần thập phân. Kết quả hiện ra trên màn hình là 8183.0047.

5. Thực hiện các phép tính sau trên máy tính bỏ túi

a) $\sqrt[3]{217} : 13^5$ với kết quả có 6 chữ số thập phân ;

b) $(\sqrt[3]{42} + \sqrt[3]{37}) : 14^5$ với kết quả có 7 chữ số thập phân ;

c) $\left[(1,23)^5 + \sqrt[3]{-42}\right]^9$ với kết quả có 5 chữ số thập phân.

Hướng dẫn cách giải câu a). Nếu dùng máy tính CASIO *fx-500 MS* ta làm như sau

Ấn [3] [SHIFT] [$\sqrt[x]{\ }$] 217 [÷] 13 [∧] [5] [=]

Ấn liên tiếp phím [MODE] cho đến khi màn hình hiện ra

Fix	Sci	Norm
1	2	3

Ấn liên tiếp [1] [6] để lấy 6 chữ số thập phân.

Kết quả hiện ra trên màn hình là 0.000016.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Xác định tính đúng sai của mệnh đề phủ định $\overline{A}$ theo tính đúng sai của mệnh đề A.

2. Thế nào là mệnh đề đảo của mệnh đề $A \Rightarrow B$? Nếu $A \Rightarrow B$ là mệnh đề đúng, thì mệnh đề đảo của nó có đúng không ? Cho ví dụ minh hoạ.

3. Thế nào là hai mệnh đề tương đương ?

4. Nêu định nghĩa tập hợp con của một tập hợp và định nghĩa hai tập hợp bằng nhau.

5. Nêu các định nghĩa hợp, giao, hiệu và phần bù của hai tập hợp. Minh hoạ các khái niệm đó bằng hình vẽ.

6. Nêu định nghĩa đoạn $[a ; b]$, khoảng $(a ; b)$, nửa khoảng $[a ; b)$, $(a ; b]$, $(-\infty ; b]$, $[a ; +\infty)$. Viết tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực dưới dạng một khoảng.

7. Thế nào là sai số tuyệt đối của một số gần đúng ? Thế nào là độ chính xác của một số gần đúng ?

8. Cho tứ giác $ABCD$. Xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ với

a) P : "$ABCD$ là một hình vuông",

Q : "$ABCD$ là một hình bình hành" ;

b) P : "$ABCD$ là một hình thoi",

Q : "$ABCD$ là một hình chữ nhật".

9. Xét mối quan hệ bao hàm giữa các tập hợp sau

A là tập hợp các hình tứ giác ;

B là tập hợp các hình bình hành ;

C là tập hợp các hình thang ;

D là tập hợp các hình chữ nhật ;

E là tập hợp các hình vuông ;

G là tập hợp các hình thoi.

10. Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{3k - 2 \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12\}$;

c) $C = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

11. Giả sử A, B là hai tập hợp số và x là một số đã cho. Tìm các cặp mệnh đề tương đương trong các mệnh đề sau

P : "$x \in A \cup B$" ;

Q : "$x \in A \setminus B$" ;

R : "$x \in A \cap B$" ;

S : "$x \in A$ và $x \in B$" ;

T : "$x \in A$ hoặc $x \in B$" ;

X : "$x \in A$ và $x \notin B$".

12. Xác định các tập hợp sau

a) $(-3 ; 7) \cap (0 ; 10)$;

b) $(-\infty ; 5) \cap (2 ; +\infty)$;

c) $\mathbb{R} \setminus (-\infty ; 3)$.

13. Dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng số để tìm giá trị gần đúng a của $\sqrt[3]{12}$ (kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba). Ước lượng sai số tuyệt đối của a.

14. Chiều cao của một ngọn đồi là $h = 347,13 \text{ m} \pm 0,2 \text{ m}$.

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 347,13.

15. Những quan hệ nào trong các quan hệ sau là đúng ?

a) $A \subset A \cup B$;

b) $A \subset A \cap B$;

c) $A \cap B \subset A \cup B$;

d) $A \cup B \subset B$;

e) $A \cap B \subset A$.

Bài tập trắc nghiệm

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau

16. Cho các số thực a, b, c, d và $a < b < c < d$. Ta có

(A) $(a\,;c) \cap (b\,;d) = (b\,;c)$; (B) $(a\,;c) \cap (b\,;d) = [b\,;c)$;

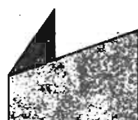
(C) $(a\,;c) \cap [b\,;d) = [b\,;c]$; (D) $(a\,;c) \cup (b\,;d) = (b\,;d)$.

17. Biết $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng. Ta có

(A) P là điều kiện cần để có Q ; (B) P là điều kiện đủ để có Q ;

(C) Q là điều kiện cần và đủ để có P ; (D) Q là điều kiện đủ để có P.

BÀI ĐỌC THÊM



HỆ NHỊ PHÂN

Cách ghi số thường dùng hiện nay (hệ ghi số thập phân) do người Hin-đu Ấn Độ phát minh vào đầu thế kỉ IX. Để ghi tất cả các số tự nhiên, người Hin-đu dùng 10 kí hiệu (sau này ta gọi là 10 chữ số) như sau

० १ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९

các số được ghi thành hàng, kể từ phải sang trái, hàng sau có giá trị bằng 10 lần hàng trước nó.

Cách ghi số của người Hin-đu được truyền qua Ả Rập rồi sang châu Âu và nhanh chóng được thừa nhận trên toàn thế giới vì tính ưu việt của nó so với các cách ghi số trước đó. Cách ghi số cổ duy nhất còn được dùng ngày nay là hệ ghi số La Mã, nhưng cũng chỉ mang ý nghĩa trang trí, tượng trưng.

Trải qua nhiều thế kỉ, 10 chữ số của người Hin-đu được biến đổi nhiều lần ở các quốc gia khác nhau, rồi đi tới thống nhất trên toàn thế giới là các chữ số

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Người Hin-đu ghi số theo nguyên tắc nào ?

Ta hãy xét một số cụ thể, chẳng hạn số 2745. Ta nói số này gồm hai nghìn, bảy trăm, bốn mươi và năm đơn vị, hay có thể viết

$$2745 = 2.10^3 + 7.10^2 + 4.10 + 5.$$

Tổng quát, cơ sở cho cách ghi số của người Hin-đu là định lí sau

> *"Mỗi số tự nhiên $a \neq 0$ đều viết được một cách duy nhất dưới dạng*
>
> $$a = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1.10 + a_0$$
>
> *trong đó $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 0, ..., n$ và $a_n \neq 0$".*

Khi a có biểu diễn như vậy, ta viết

$$a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}.$$

và nói đó là cách ghi số a trong hệ thập phân.

Tuy nhiên, định lí trên vẫn đúng khi ta thay 10 bởi số nguyên $g > 1$ tuỳ ý. Mỗi số tự nhiên $a \neq 0$ đều viết được một cách duy nhất dưới dạng

$$a = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + ... + a_1 g + a_0$$

trong đó $0 \leq a_i \leq g - 1$, $a_n \neq 0$.

Khi a có biểu diễn như vậy, ta viết

$$a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}_g$$

và nói đó là cách ghi số a trong hệ g - phân ; $a_0, a_1, ..., a_n$ gọi là các chữ số của số a. Vì $0 \leq a_i \leq g - 1$, nên để biểu diễn số tự nhiên trong hệ g - phân ta cần dùng g chữ số.

Để biểu diễn số tự nhiên a trong hệ g - phân, ta thực hiện phép chia liên tiếp a và các thương nhận được cho g.

Ví dụ. Biểu diễn 10 trong hệ nhị phân ($g = 2$).

Ta có

10	2			
0	5	2		
	1	2	2	
		0	1	2
			1	0

Viết dãy các số dư theo thứ tự từ dưới lên ta được sự biểu diễn của 10 trong hệ nhị phân

$$10 = 1010_2.$$

Trong hệ nhị phân chỉ có hai chữ số là 0 và 1 và mỗi số tự nhiên được biểu diễn bởi một dãy kí hiệu 0 và 1. Một dãy kí hiệu 0 và 1 có thể biểu thị bởi một dãy bóng đèn với quy ước bóng đèn sáng biểu thị chữ số 1, bóng đèn tắt biểu thị chữ số 0.

Điều đó giải thích vì sao hệ nhị phân được sử dụng trong Công nghệ thông tin.

Bảng dưới đây cho sự biểu diễn các số từ 0 đến 15.

Số trong hệ thập phân	Biểu diễn nhị phân	Biểu diễn vật lí
0	0	○ ○ ○ ○
1	1	○ ○ ○ ✸
2	10	○ ○ ✸ ○
3	11	○ ○ ✸ ✸
4	100	○ ✸ ○ ○
5	101	○ ✸ ○ ✸
6	110	○ ✸ ✸ ○
7	111	○ ✸ ✸ ✸
8	1000	✸ ○ ○ ○
9	1001	✸ ○ ○ ✸
10	1010	✸ ○ ✸ ○
11	1011	✸ ○ ✸ ✸
12	1100	✸ ✸ ○ ○
13	1101	✸ ✸ ○ ✸
14	1110	✸ ✸ ✸ ○
15	1111	✸ ✸ ✸ ✸

Việc thực hiện các phép tính trong hệ nhị phân cũng tương tự như trong hệ thập phân nhưng dễ dàng hơn nhiều vì bảng cộng và bảng nhân (cộng và nhân các chữ số) trong hệ nhị phân rất đơn giản

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Để cộng hai số bất kì trong hệ nhị phân, ta đặt phép tính như trong hệ thập phân và chú ý rằng 1 + 1 = 10 (viết 0 nhớ 1).

Ví dụ.

$$\begin{array}{r} 10110 \\ +\quad 1011 \\ \hline 100001 \end{array}$$

Còn đối với phép nhân ta chỉ cần thực hiện các phép dịch chuyển và phép cộng.

Ví dụ.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \times & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Như vậy, các phép tính trong hệ nhị phân được tiến hành theo những quy tắc đơn giản, do đó dễ "dạy" cho máy thực hiện. Đó cũng là lí do để sử dụng hệ nhị phân trong Công nghệ thông tin.

BẠN CÓ BIẾT



HỆ GHI SỐ AI CẬP

Nói đến Ai Cập ta nghĩ ngay đến các Kim tự tháp đầy huyền bí. Chúng chứng tỏ rằng từ thời xa xưa ở nơi đây đã có một nền văn minh rực rỡ.

Từ khoảng 3400 năm trước Công nguyên, người Ai Cập đã có một hệ thống ghi số gồm 7 kí hiệu, có giá trị tương ứng như sau

1 10 100 1000 10 000 100 000 1 000 000



Kim tự tháp Kê-ốp

Từ 7 kí hiệu trên các số được ghi theo nguyên tắc cộng tính, nghĩa là giá trị của một số bằng tổng giá trị các kí hiệu có mặt trong số đó. Ví dụ

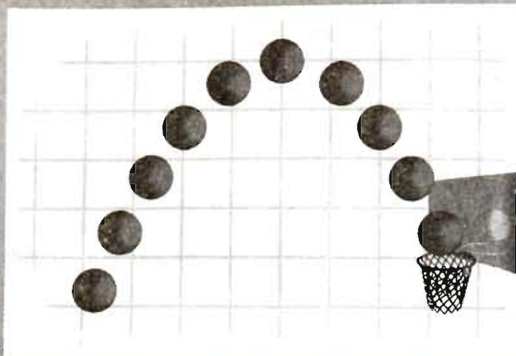
=

= 1 000 000 + 100 000 + 10 000 + 10 000 + 10 + 1 + 1

= 1 120 012.

Chương II

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI



Trong chương trình môn Toán Trung học cơ sở, học sinh đã nắm được các khái niệm hàm số, hàm số bậc nhất, hàm số bậc hai, hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến. Chương này ôn tập và bổ sung các khái niệm cơ bản về hàm số, tập xác định, đồ thị của hàm số, khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ, xét chiều biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số đã học.

§1 HÀM SỐ

I – ÔN TẬP VỀ HÀM SỐ

1. Hàm số. Tập xác định của hàm số

Giả sử có hai đại lượng biến thiên x và y, trong đó x nhận giá trị thuộc tập số D.

> *Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực* $\mathbb{R}$ *thì ta có một* ***hàm số.***
>
> *Ta gọi x là* ***biến số*** *và y là* ***hàm số*** *của x.*
>
> *Tập hợp D được gọi là* ***tập xác định*** *của hàm số.*

Ví dụ 1

Bảng dưới đây trích từ trang web của Hiệp hội liên doanh Việt Nam – Thái Lan ngày 26 – 10 – 2005 về thu nhập bình quân đầu người (TNBQĐN) của nước ta từ năm 1995 đến năm 2004.

Năm	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2004**
TNBQĐN (tính theo USD)	200	282	295	311	339	363	375	394	564

Bảng này thể hiện sự phụ thuộc giữa thu nhập bình quân đầu người (kí hiệu là y) và thời gian x (tính bằng năm).

Với mỗi giá trị $x \in D = \{1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2004\}$ *có một giá trị duy nhất y.*

Vậy ta có một hàm số. Tập hợp D là tập xác định của hàm số này.

Các giá trị $y = 200$; 282 ; 295 ; ... được gọi là các *giá trị của hàm số*, tương ứng, tại $x = 1995$; 1996 ; 1997 ; ...


1

Hãy nêu một ví dụ thực tế về hàm số.

2. Cách cho hàm số

Một hàm số có thể được cho bằng các cách sau.

Hàm số cho bằng bảng

Hàm số trong ví dụ trên là một hàm số được cho bằng bảng.


2
Hãy chỉ ra các giá trị của hàm số trên tại $x = 2001$; 2004 ; 1999.

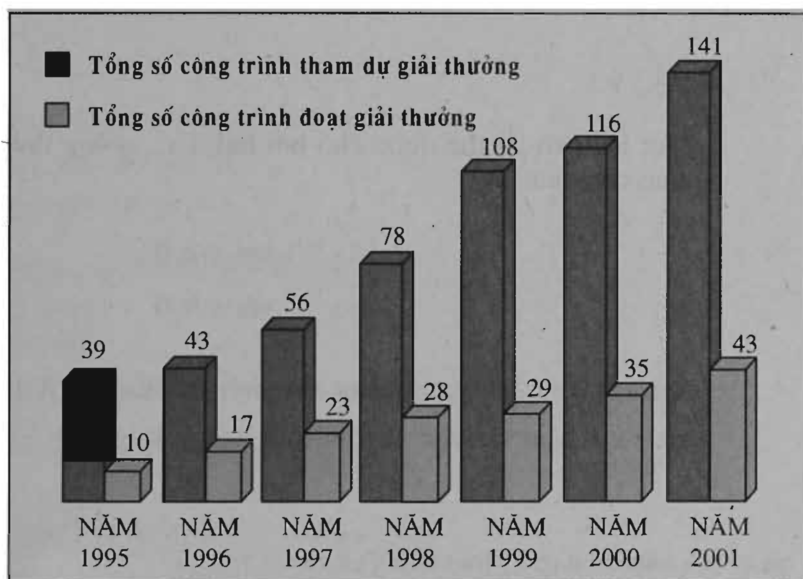
Hàm số cho bằng biểu đồ

Ví dụ 2. Biểu đồ dưới (h.13) (trích từ báo Khoa học và Đời sống số 47 ngày 8 – 11 – 2002) mô tả số công trình khoa học kĩ thuật đăng kí dự giải thưởng Sáng tạo Khoa học Công nghệ Việt Nam và số công trình đoạt giải hàng năm từ 1995 đến 2001.

Biểu đồ này xác định hai hàm số trên cùng tập xác định

$$D = \{1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001\}.$$


3
Hãy chỉ ra các giá trị của mỗi hàm số trên tại các giá trị $x \in D$.



Hình 13

Hàm số cho bằng công thức


4
Hãy kể các hàm số đã học ở Trung học cơ sở.

Các hàm số $y = ax + b$, $y = \dfrac{a}{x}$, $y = ax^2$ là những hàm số được cho bởi công thức.

Khi cho hàm số bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta có quy ước sau

> ***Tập xác định của hàm số $y = f(x)$*** *là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.*

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{x-3}$.

Giải. Biểu thức $\sqrt{x-3}$ có nghĩa khi $x - 3 \geq 0$, tức là khi $x \geq 3$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = [3\ ;\ +\infty)$.


5

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $g(x) = \dfrac{3}{x+2}$;

b) $h(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$.

CHÚ Ý

Một hàm số có thể được cho bởi hai, ba,... công thức. Chẳng hạn, cho hàm số

$$y = \begin{cases} 2x + 1 & \text{với } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

nghĩa là với $x \geq 0$ hàm số được xác định bởi biểu thức $f(x) = 2x + 1$, với $x < 0$ hàm số được xác định bởi biểu thức $g(x) = -x^2$.

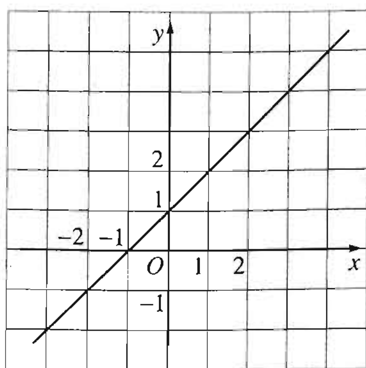

6

Tính giá trị của hàm số ở chú ý trên tại $x = -2$ và $x = 5$.

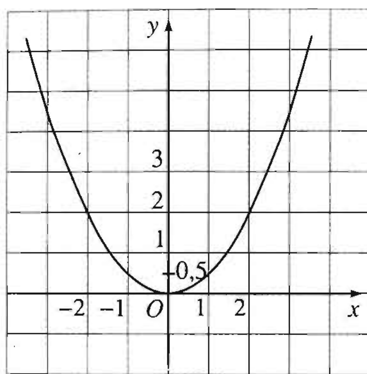
3. Đồ thị của hàm số

> ***Đồ thị*** *của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x\ ;f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi x thuộc D.*

Ví dụ 4. Trong Sách giáo khoa Toán 9, ta đã biết đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ là một đường thẳng, đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2$ là một đường parabol.



Đồ thị hàm số $f(x) = x + 1$



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

Hình 14



7

Dựa vào đồ thị của hai hàm số đã cho trong hình 14

$$y = f(x) = x + 1 \text{ và } y = g(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ hãy}$$

a) Tính $f(-2), f(-1), f(0), f(2), g(-1), g(-2), g(0)$;

b) Tìm x, sao cho $f(x) = 2$;

Tìm x, sao cho $g(x) = 2$.

Ta thường gặp trường hợp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường (đường thẳng, đường cong, ...). Khi đó, ta nói $y = f(x)$ là *phương trình* của đường đó. Chẳng hạn

$y = ax + b$ là phương trình của một đường thẳng.

$y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là phương trình của một đường parabol.

II – SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

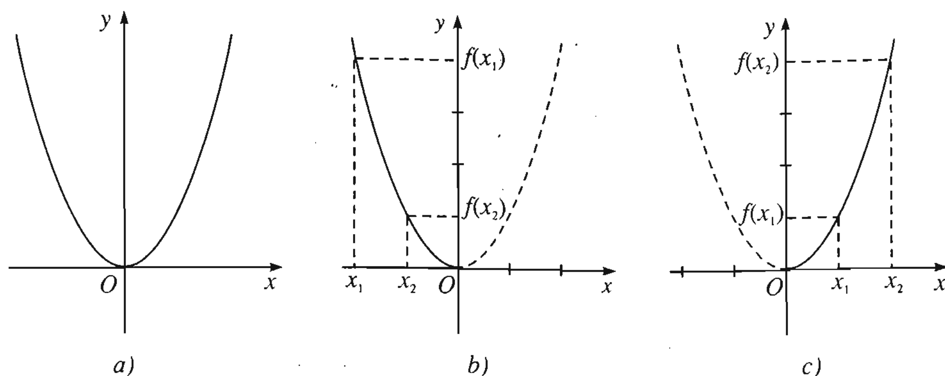
1. Ôn tập

Xét đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$ (h.15a). Ta thấy trên khoảng $(-\infty ; 0)$ đồ thị "đi xuống" từ trái sang phải (h.15b) và với

$$x_1, x_2 \in (-\infty ; 0), x_1 < x_2 \text{ thì } f(x_1) > f(x_2).$$

Như vậy, khi giá trị của biến số *tăng* thì giá trị của hàm số *giảm*.

Ta nói hàm số $y = x^2$ *nghịch biến* trên khoảng $(-\infty ; 0)$.



Hình 15

Trên khoảng $(0 ; +\infty)$ đồ thị "đi lên" từ trái sang phải (h.15c) và với

$$x_1, x_2 \in (0 ; +\infty) ; \ x_1 < x_2 \text{ thì } f(x_1) < f(x_2).$$

Như vậy, khi giá trị của biến số *tăng* thì giá trị của hàm số cũng *tăng*.

Ta nói hàm số $y = x^2$ *đồng biến* trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

CHÚ Ý

Khi $x > 0$ và nhận các giá trị lớn tuỳ ý thì ta nói x dần tới $+\infty$.

Khi $x < 0$ và $|x|$ nhận các giá trị lớn tuỳ ý thì ta nói x dần tới $-\infty$.

Ta thấy khi x dần tới $+\infty$ hay $-\infty$ thì x^2 dần tới $+\infty$.

Tổng quát

*Hàm số $y = f(x)$ gọi là **đồng biến (tăng)** trên khoảng $(a ; b)$ nếu*

$$\forall x_1, x_2 \in (a ; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

*Hàm số $y = f(x)$ gọi là **nghịch biến (giảm)** trên khoảng $(a ; b)$ nếu*

$$\forall x_1, x_2 \in (a ; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

2. Bảng biến thiên

Xét chiều biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng đồng biến và các khoảng nghịch biến của nó. Kết quả xét chiều biến thiên được tổng kết trong một bảng gọi là ***bảng biến thiên***.

Ví dụ 5. Dưới đây là bảng biến thiên của hàm số $y = x^2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Hàm số $y = x^2$ xác định trên khoảng (hoặc trong khoảng) $(-\infty\ ;\ +\infty)$ và khi x dần tới $+\infty$ hoặc dần tới $-\infty$ thì y đều dần tới $+\infty$.

Tại $x = 0$ thì $y = 0$.

Để diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$ *ta vẽ mũi tên đi xuống (từ* $+\infty$ *đến* 0*).*

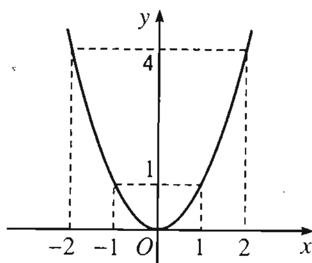
Để diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$ *ta vẽ mũi tên đi lên (từ* 0 *đến* $+\infty$*).*

Nhìn vào bảng biến thiên, ta sơ bộ hình dung được đồ thị hàm số (đi lên trong khoảng nào, đi xuống trong khoảng nào).

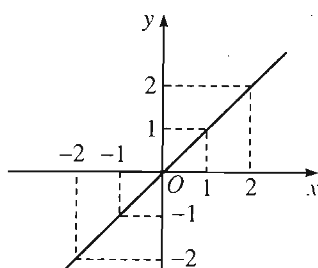
III – TÍNH CHẴN LẺ CỦA HÀM SỐ

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Xét đồ thị của hai hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = g(x) = x$ (h.16).



Đồ thị hàm số $y = x^2$



Đồ thị hàm số $y = x$

Hình 16

Đường parabol $y = x^2$ có *trục đối xứng* là Oy. Tại hai giá trị đối nhau của biến số x, hàm số nhận cùng một giá trị

$$f(-1) = f(1) = 1, f(-2) = f(2) = 4, \ldots$$

Gốc toạ độ O là *tâm đối xứng* của đường thẳng $y = x$. Tại hai giá trị đối nhau của biến số x, hàm số nhận hai giá trị đối nhau

$$g(-1) = -g(1),\ g(-2) = -g(2),\ \ldots$$

Hàm số $y = x^2$ là một ví dụ về *hàm số chẵn*.

Hàm số $y = x$ là một ví dụ về *hàm số lẻ*.

Tổng quát

> *Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là* ***hàm số chẵn*** *nếu*
>
> $$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = f(x).$$
>
> *Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là* ***hàm số lẻ*** *nếu*
>
> $$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = -f(x).$$



8

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $y = 3x^2 - 2$; b) $y = \frac{1}{x}$; c) $y = \sqrt{x}$.

CHÚ Ý

Một hàm số không nhất thiết phải là hàm số chẵn hoặc hàm số lẻ. Chẳng hạn, hàm số $y = 2x + 1$ không là hàm số chẵn, cũng không là hàm số lẻ vì giá trị của nó tại $x = 1$ và $x = -1$ tương ứng là 3 và -1. Hai giá trị này không bằng nhau và cũng không đối nhau.

2. Đồ thị của hàm số chẵn, hàm số lẻ

Nhận xét về đồ thị của hàm số $y = x^2$ và $y = x$ trong mục 1 cũng đúng cho trường hợp tổng quát. Ta có kết luận sau

Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

Bài tập

1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \frac{3x - 2}{2x + 1}$; b) $y = \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$; c) $y = \sqrt{2x + 1} - \sqrt{3 - x}$.

2. Cho hàm số

$$y = \begin{cases} x + 1 & \text{với} \quad x \geq 2 \\ x^2 - 2 & \text{với} \quad x < 2. \end{cases}$$

Tính giá trị của hàm số đó tại $x = 3$; $x = -1$; $x = 2$.

3. Cho hàm số $y = 3x^2 - 2x + 1$. Các điểm sau có thuộc đồ thị của hàm số đó không ?

a) $M(-1 ; 6)$;

b) $N(1 ; 1)$;

c) $P(0 ; 1)$.

4. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $y = |x|$;

b) $y = (x + 2)^2$;

c) $y = x^3 + x$;

d) $y = x^2 + x + 1$.

§2 HÀM SỐ $y = ax + b$

I – ÔN TẬP VỀ HÀM SỐ BẬC NHẤT

$$y = ax + b \ (a \neq 0).$$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Chiều biến thiên

Với $a > 0$ *hàm số đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

Với $a < 0$ *hàm số nghịch biến trên* $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

$a > 0$

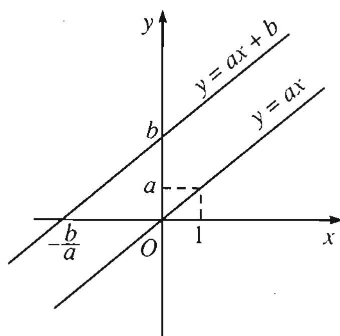
x	$-\infty$ ↗ $+\infty$
y	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$a < 0$

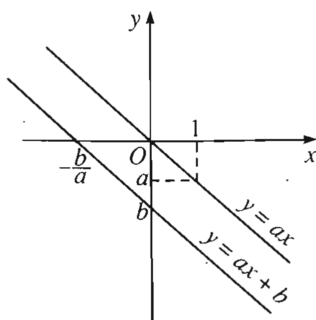
x	$-\infty$ ↘ $+\infty$
y	$+\infty$ ↘ $-\infty$

Đồ thị

Đồ thị của hàm số là một đường thẳng không song song và cũng không trùng với các trục toạ độ. Đường thẳng này luôn song song với đường thẳng $y = ax$ (nếu $b \neq 0$) và đi qua hai điểm $A(0 ; b)$; $B\left(-\dfrac{b}{a} ; 0\right)$ (h.17).



$a > 0$



$a < 0$

Hình 17



1

Vẽ đồ thị của các hàm số : $y = 3x + 2$; $y = -\dfrac{1}{2}x + 5$.

II – HÀM SỐ HẰNG $y = b$



2

Cho hàm số hằng $y = 2$.

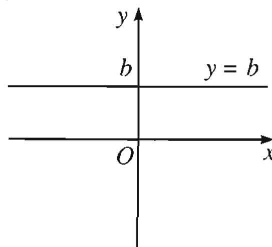
Xác định giá trị của hàm số tại $x = -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2$.

Biểu diễn các điểm

$(-2 ; 2), (-1 ; 2), (0 ; 2), (1 ; 2), (2 ; 2)$ trên mặt phẳng toạ độ.

Nêu nhận xét về đồ thị của hàm số $y = 2$.

Đồ thị của hàm số $y = b$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0 ; b)$. Đường thẳng này gọi là đường thẳng $y = b$ (h.18).



Hình 18

III – HÀM SỐ $y = |x|$

Hàm số $y = |x|$ có liên quan chặt chẽ với hàm bậc nhất.

1. Tập xác định

Hàm số $y = |x|$ xác định với mọi giá trị của x, tức là tập xác định $D = \mathbb{R}$.

2. Chiều biến thiên

Theo định nghĩa của giá trị tuyệt đối, ta có

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra

Hàm số $y = |x|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ *và đồng biến trên khoảng* $(0 ; +\infty)$.

Bảng biến thiên.

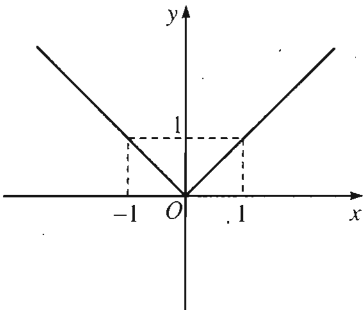
Khi $x > 0$ và dần tới $+\infty$ thì $y = x$ dần tới $+\infty$, khi $x < 0$ và dần tới $-\infty$ thì $y = -x$ cũng dần tới $+\infty$. Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

3. Đồ thị (h.19)

Trong nửa khoảng $[0 ; +\infty)$ đồ thị của hàm số $y = |x|$ trùng với đồ thị của hàm số $y = x$.

Trong khoảng $(-\infty ; 0)$ đồ thị của hàm số $y = |x|$ trùng với đồ thị của hàm số $y = -x$.



Hình 19

CHÚ Ý

Hàm số $y = |x|$ là một hàm số chẵn, đồ thị của nó nhận Oy làm trục đối xứng.

Bài tập

1. Vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = 2x - 3$;

b) $y = \sqrt{2}$.

c) $y = -\dfrac{3}{2}x + 7$;

d) $y = |x| - 1$.

2. Xác định a, b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm

a) $A(0 ; 3)$ và $B\left(\dfrac{3}{5}; 0\right)$;

b) $A(1 ; 2)$ và $B(2 ; 1)$;

c) $A(15 ; -3)$ và $B(21 ; -3)$.

3. Viết phương trình $y = ax + b$ của các đường thẳng

a) Đi qua hai điểm $A(4 ; 3)$ và $B(2 ; -1)$;

b) Đi qua điểm $A(1 ; -1)$ và song song với Ox.

4. Vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = \begin{cases} 2x & \text{với } x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2}x & \text{với } x < 0 \end{cases}$;

b) $y = \begin{cases} x + 1 & \text{với } x \geq 1 \\ -2x + 4 & \text{với } x < 1. \end{cases}$

§3 HÀM SỐ BẬC HAI

Hàm số bậc hai được cho bởi công thức

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0).$$

Tập xác định của hàm số này là $D = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ đã học ở lớp 9 là một trường hợp riêng của hàm số này.

I – ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

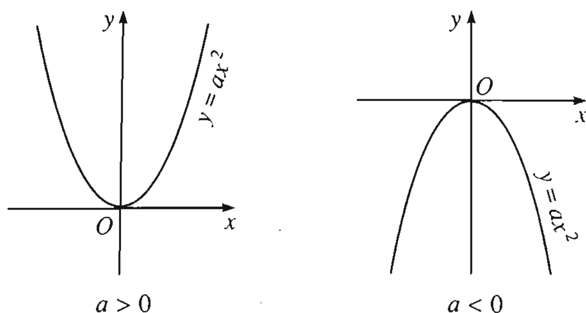


1

Nhắc lại các kết quả đã biết về đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

1. Nhận xét

1) Điểm $O(0\ ;\ 0)$ là đỉnh của parabol $y = ax^2$. Đó là điểm thấp nhất của đồ thị trong trường hợp $a > 0$ ($y \geq 0$ với mọi x), và là điểm cao nhất của đồ thị trong trường hợp $a < 0$ ($y \leq 0$ với mọi x) (h.20).



Hình 20

2) Thực hiện phép biến đổi đã biết ở lớp 9, ta có thể viết

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Từ đó ta có nhận xét sau

Nếu $x = -\frac{b}{2a}$ thì $y = \frac{-\Delta}{4a}$. Vậy điểm $I\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ \frac{-\Delta}{4a}\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Nếu $a > 0$ thì $y \geq \frac{-\Delta}{4a}$ với mọi x, do đó I là điểm thấp nhất của đồ thị.

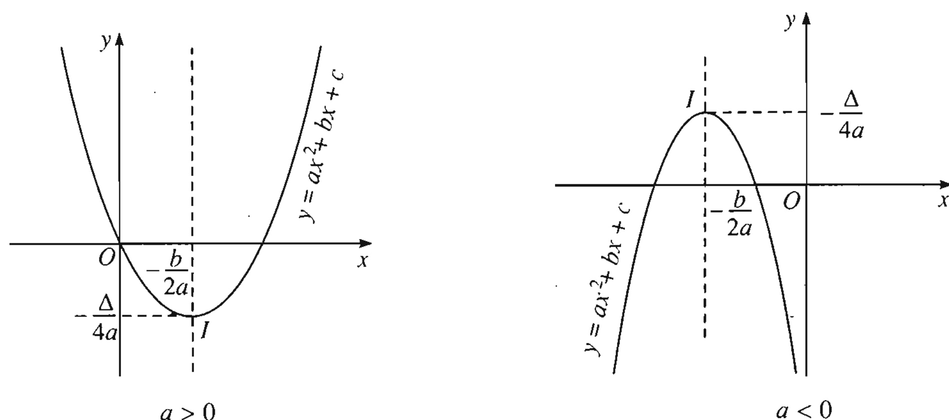
Nếu $a < 0$ thì $y \leq \frac{-\Delta}{4a}$ với mọi x, do đó I là điểm cao nhất của đồ thị.

Như vậy, điểm $I\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ \frac{-\Delta}{4a}\right)$ đối với đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đóng vai trò như đỉnh $O(0\ ;\ 0)$ của parabol $y = ax^2$.

2. Đồ thị

Dưới đây (xem bài đọc thêm) ta sẽ thấy đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ chính là đường parabol $y = ax^2$ sau một số phép "dịch chuyển" trên mặt phẳng toạ độ.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *là một đường parabol có đỉnh là* điểm $I\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, *có trục đối xứng là đường thẳng* $x = -\dfrac{b}{2a}$. *Parabol này quay bề lõm lên trên nếu* $a > 0$, *xuống dưới nếu* $a < 0$ (h.21).



Hình 21

3. Cách vẽ

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta thực hiện các bước

1) *Xác định toạ độ của đỉnh* $I\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

2) *Vẽ trục đối xứng* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

3) *Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung (điểm* $(0 ; c)$*) và trục hoành (nếu có).*

Xác định thêm một số điểm thuộc đồ thị, chẳng hạn điểm đối xứng với điểm $(0 ; c)$ qua trục đối xứng của parabol, để vẽ đồ thị chính xác hơn.

4) *Vẽ parabol.*

Khi vẽ parabol cần chú ý đến dấu của hệ số a ($a > 0$ bề lõm quay lên trên, $a < 0$ bề lõm quay xuống dưới).

Ví dụ. Vẽ parabol $y = 3x^2 - 2x - 1$.

Ta có

Đỉnh $I\left(\frac{1}{3};\frac{-4}{3}\right)$;

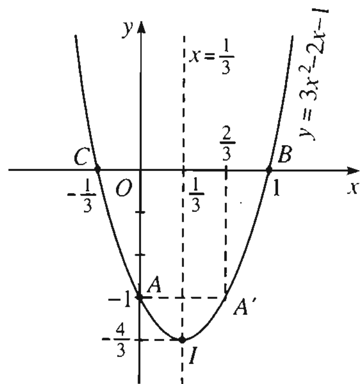
Trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$;

Giao điểm với Oy là $A(0\ ;-1)$;

Điểm đối xứng với điểm $A(0\ ;-1)$ qua đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ là $A'\left(\frac{2}{3};-1\right)$.

Giao điểm với Ox là $B(1\ ;0)$ và $C\left(-\frac{1}{3};0\right)$.

Đồ thị như hình 22.



Hình 22



2

Vẽ parabol $y = -2x^2 + x + 3$.

II – CHIỀU BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta có bảng biến thiên của nó trong hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$ như sau

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$\frac{-\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	$\frac{-\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

Từ đó ta có định lí dưới đây

ĐỊNH LÍ

Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$

Nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$;

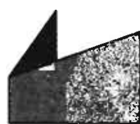
Đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$

Đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$;

Nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$.

BÀI ĐỌC THÊM



ĐƯỜNG PARABOL

Trong §3, ta đã khẳng định rằng đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một đường parabol. Dưới đây ta sẽ chứng tỏ điều đó và cho thấy đường parabol này được suy ra từ parabol $y = ax^2$ như thế nào.

1. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + y_0$

Xét hai hàm số $f(x) = ax^2$ và $g(x) = ax^2 + y_0$.

Tại cùng một điểm $X \in \mathbb{R}$ ta có

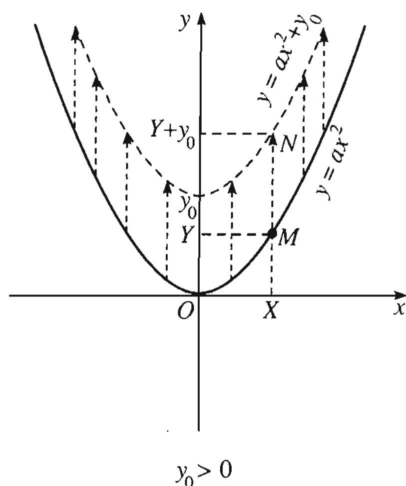
$$Y = f(X) = aX^2,\ g(X) = aX^2 + y_0 = Y + y_0.$$

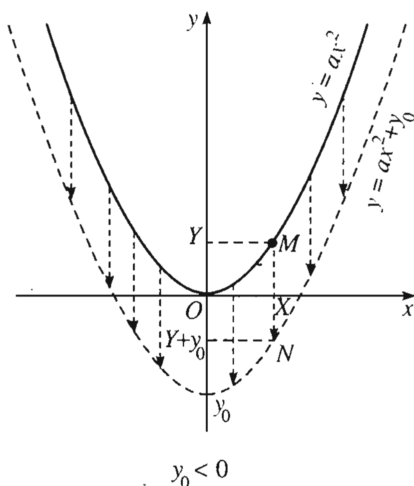
Do đó, nếu điểm $M(X; Y)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2$ thì điểm $N(X; Y + y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2 + y_0$.

Ta thấy nếu dịch chuyển (tịnh tiến) điểm $M(X; Y)$ song song với trục tung một đoạn bằng $|y_0|$ đơn vị (lên trên nếu $y_0 > 0$, xuống dưới nếu $y_0 < 0$) thì được điểm $N(X; Y + y_0)$.

Vậy

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + y_0$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ nhờ phép tịnh tiến song song với trục tung $|y_0|$ đơn vị, lên trên nếu $y_0 > 0$, xuống dưới nếu $y_0 < 0$ (h.23).





Hình 23

2. Đồ thị của hàm số $y = a(x + x_0)^2$

Xét hai hàm số

$$f(x) = ax^2 \text{ và } g(x) = a(x + x_0)^2.$$

Với X tuỳ ý, ta có

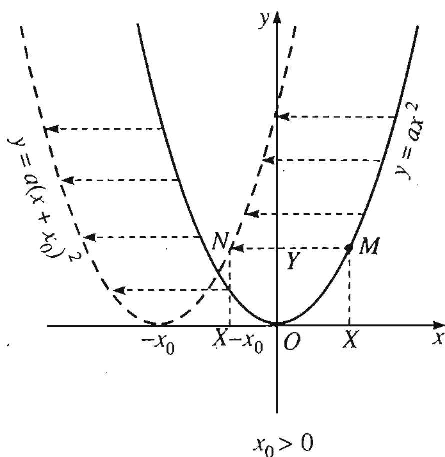
$$f(X) = aX^2,\ g(X - x_0) = a[(X - x_0) + x_0]^2 = aX^2.$$

Nghĩa là, giá trị của hàm số $f(x)$ tại X bằng giá trị của hàm số $g(x)$ tại $X - x_0$. Vậy nếu điểm $M(X ; Y)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2$ thì điểm $N(X - x_0 ; Y)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = a(x + x_0)^2$.

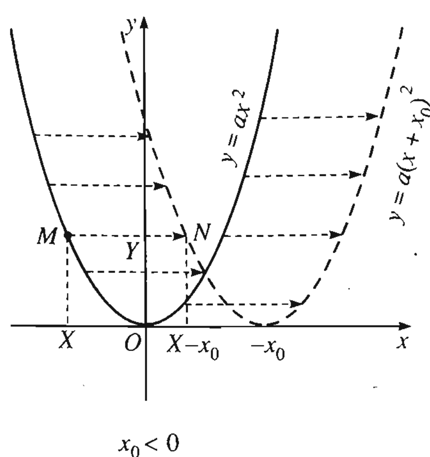
Ta thấy, nếu tịnh tiến điểm $M(X ; Y)$ song song với trục hoành $|x_0|$ đơn vị về bên trái nếu $x_0 > 0$, về bên phải nếu $x_0 < 0$ thì được điểm $N(X - x_0 ; Y)$.

Vậy

Đồ thị của hàm số $y = a(x + x_0)^2$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ nhờ phép tịnh tiến song song với trục hoành $|x_0|$ đơn vị, về bên trái nếu $x_0 > 0$, về bên phải nếu $x_0 < 0$ (h.24).



$x_0 > 0$



$x_0 < 0$

Hình 24

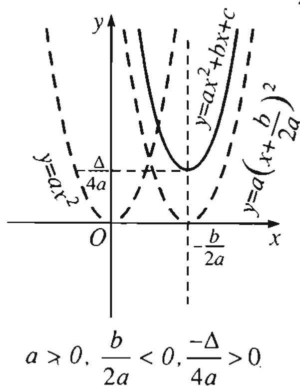
3. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$

Thực hiện phép biến đổi đã biết ở lớp 9, ta có thể viết

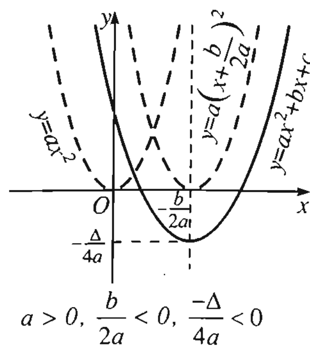
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Áp dụng các kết quả trên với $x_0 = \frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{-\Delta}{4a}$ ta thấy

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ được suy ra từ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ trước hết nhờ phép tịnh tiến song song với trục hoành $\left|\frac{b}{2a}\right|$ đơn vị, về bên trái nếu $\frac{b}{2a} > 0$, về bên phải nếu $\frac{b}{2a} < 0$, sau đó nhờ phép tịnh tiến song song với trục tung $\left|\frac{-\Delta}{4a}\right|$ đơn vị, lên trên nếu $\frac{-\Delta}{4a} > 0$, xuống dưới nếu $\frac{-\Delta}{4a} < 0$ (h.25).



$a > 0,\ \frac{b}{2a} < 0,\ \frac{-\Delta}{4a} > 0$



$a > 0,\ \frac{b}{2a} < 0,\ \frac{-\Delta}{4a} < 0$

Hình 25

Như vậy, đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ cũng là một đường parabol.

Trong đời sống hằng ngày chúng ta thường gặp những hình ảnh của đường parabol, như khi ta ngắm các đài phun nước, hoặc chiêm ngưỡng cảnh bắn pháo hoa muôn màu, muôn sắc. Nhiều công trình kiến trúc cũng được tạo dáng theo hình parabol, như cây cầu, vòm nhà, cổng ra vào,... Điều đó không chỉ bảo đảm tính bền vững mà còn tạo nên vẻ đẹp của công trình.



Bài tập

1. Xác định toạ độ của đỉnh và các giao điểm với trục tung, trục hoành (nếu có) của mỗi parabol

a) $y = x^2 - 3x + 2$; b) $y = -2x^2 + 4x - 3$;

c) $y = x^2 - 2x$; d) $y = -x^2 + 4$.

2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$; b) $y = -3x^2 + 2x - 1$;

c) $y = 4x^2 - 4x + 1$; d) $y = -x^2 + 4x - 4$;

e) $y = 2x^2 + x + 1$; f) $y = -x^2 + x - 1$.

3. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1 ; 5)$ và $N(-2 ; 8)$;

b) Đi qua điểm $A(3 ; -4)$ và có trục đối xứng là $x = -\frac{3}{2}$;

c) Có đỉnh là $I(2 ; -2)$;

d) Đi qua điểm $B(-1 ; 6)$ và tung độ của đỉnh là $-\frac{1}{4}$.

4. Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(8 ; 0)$ và có đỉnh là $I(6 ; -12)$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Phát biểu quy ước về tập xác định của hàm số cho bởi công thức.

   Từ đó hai hàm số $y = \dfrac{x+1}{(x+1)(x^2+2)}$ và $y = \dfrac{1}{x^2+2}$ có gì khác nhau ?

2. Thế nào là hàm số đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a ; b)$?
3. Thế nào là một hàm số chẵn ? Thế nào là một hàm số lẻ ?
4. Chỉ ra khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = ax + b$, trong mỗi trường hợp $a > 0$; $a < 0$.
5. Chỉ ra khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = ax^2 + bx + c$, trong mỗi trường hợp $a > 0$; $a < 0$.
6. Xác định toạ độ của đỉnh, phương trình của trục đối xứng của parabol

$$y = ax^2 + bx + c.$$

7. Xác định toạ độ giao điểm của parabol $y = ax^2 + bx + c$ với trục tung. Tìm điều kiện để parabol này cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và viết toạ độ của các giao điểm trong trường hợp đó.
8. Tìm tập xác định của các hàm số

   a) $y = \dfrac{2}{x+1} + \sqrt{x+3}$;

   b) $y = \sqrt{2-3x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

   c) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & \text{với } x \geq 1 \\ \sqrt{2-x} & \text{với } x < 1. \end{cases}$

9. Xét chiều biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số

   a) $y = \dfrac{1}{2}x - 1$; b) $y = 4 - 2x$;

c) $y = \sqrt{x^2}$;   d) $y = |x + 1|$.

10. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = x^2 - 2x - 1$;

b) $y = -x^2 + 3x + 2$.

11. Xác định a, b biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1 ; 3)$, $B(-1 ; 5)$.

12. Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$

a) Đi qua ba điểm $A(0 ; -1)$, $B(1 ; -1)$, $C(-1 ; 1)$;

b) Có đỉnh $I(1 ; 4)$ và đi qua điểm $D(3 ; 0)$.

Bài tập trắc nghiệm

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau

13. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x - 3} - \sqrt{1 - 2x}$ là

(A) $D = \left[\frac{1}{2} ; 3\right]$;   (B) $D = \left[-\infty ; \frac{1}{2}\right] \cup [3 ; +\infty)$;

(C) $D = \varnothing$;   (D) $D = \mathbb{R}$.

14. Parabol $y = 3x^2 - 2x + 1$ có đỉnh là

(A) $I\left(-\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$;   (B) $I\left(-\frac{1}{3} ; -\frac{2}{3}\right)$;

(C) $I\left(\frac{1}{3} ; -\frac{2}{3}\right)$;   (D) $I\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

15. Hàm số $y = x^2 - 5x + 3$

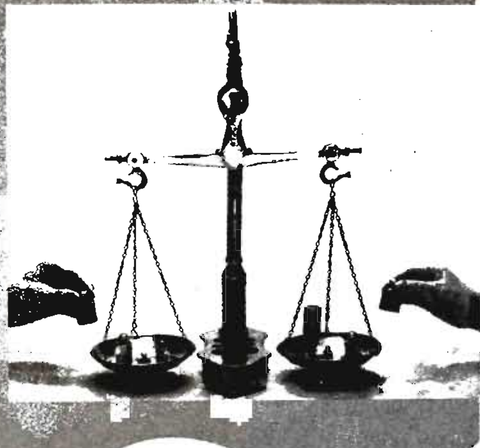
(A) Đồng biến trên khoảng $\left(-\infty ; \frac{5}{2}\right)$;

(B) Đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2} ; +\infty\right)$;

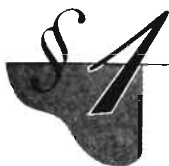
(C) Nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2} ; +\infty\right)$;

(D) Đồng biến trên khoảng $(0 ; 3)$.

Chương III PHƯƠNG TRÌNH. HỆ PHƯƠNG TRÌNH



Chương này bổ sung các kiến thức về phương trình ; ôn tập và hệ thống hoá cách giải phương trình bậc nhất, bậc hai một ẩn ; phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ; đồng thời cung cấp cách giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn thông qua ví dụ.



ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

I – KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH

1

Nêu ví dụ về phương trình một ẩn, phương trình hai ẩn.

1. Phương trình một ẩn

> ***Phương trình ẩn x*** *là mệnh đề chứa biến có dạng*
>
> $$f(x) = g(x) \qquad (1)$$
>
> *trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x. Ta gọi $f(x)$ là vế trái, $g(x)$ là vế phải của phương trình* (1).
>
> *Nếu có số thực x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng thì x_0 được gọi là một* ***nghiệm của phương trình*** (1).
>
> ***Giải phương trình*** (1) *là tìm* tất cả *các nghiệm của nó (nghĩa là tìm tập nghiệm).*
>
> *Nếu phương trình không có nghiệm nào cả thì ta nói phương trình* ***vô nghiệm*** *(hoặc nói tập nghiệm của nó là rỗng).*

CHÚ Ý

Có trường hợp, khi giải phương trình ta không viết được chính xác nghiệm của chúng dưới dạng số thập phân mà chỉ viết gần đúng. Chẳng hạn, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ là nghiệm của phương trình $2x = \sqrt{3}$. Giá trị $0,866\left(\approx \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ là một ***nghiệm gần đúng*** của phương trình.

2. Điều kiện của một phương trình


2

Cho phương trình $\frac{x+1}{x-2} = \sqrt{x-1}$.

Khi $x = 2$ vế trái của phương trình đã cho có nghĩa không ? Vế phải có nghĩa khi nào ?

Khi giải phương trình (1), ta cần lưu ý tới điều kiện đối với ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa (tức là mọi phép toán đều thực hiện được). Ta cũng nói đó là *điều kiện xác định của phương trình* (hay gọi tắt là *điều kiện của phương trình*).

Khi các phép toán ở hai vế của một phương trình đều thực hiện được với mọi giá trị của x thì ta có thể không ghi điều kiện của phương trình.


3

Hãy tìm điều kiện của các phương trình

a) $3 - x^2 = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$;

b) $\frac{1}{x^2-1} = \sqrt{x+3}$.

3. Phương trình nhiều ẩn

Ngoài các phương trình một ẩn, ta còn gặp những phương trình có nhiều ẩn số, chẳng hạn

$$3x + 2y = x^2 - 2xy + 8, \qquad (2)$$

$$4x^2 - xy + 2z = 3z^2 + 2xz + y^2. \qquad (3)$$

Phương trình (2) là phương trình hai ẩn (x và y), còn (3) là phương trình ba ẩn (x, y và z).

Khi $x = 2$, $y = 1$ thì hai vế của phương trình (2) có giá trị bằng nhau, ta nói cặp số $(x ; y) = (2 ; 1)$ là một nghiệm của phương trình (2).

Tương tự, bộ ba số $(x ; y ; z) = (-1 ; 1 ; 2)$ là một nghiệm của phương trình (3).

4. Phương trình chứa tham số

Trong một phương trình (một hoặc nhiều ẩn), ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là ***tham số***.

Giải và biện luận phương trình chứa tham số nghĩa là xét xem với giá trị nào của tham số phương trình vô nghiệm, có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

Chẳng hạn $$(m+1)x - 3 = 0,$$

$$x^2 - 2x + m = 0$$

có thể được coi là các phương trình ẩn x chứa tham số m.

II – PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ



4

Các phương trình sau có tập nghiệm bằng nhau hay không

a) $x^2 + x = 0$ và $\frac{4x}{x-3} + x = 0$?

b) $x^2 - 4 = 0$ và $2 + x = 0$?

1. Phương trình tương đương

*Hai phương trình được gọi là **tương đương** khi chúng có cùng tập nghiệm.*

Ví dụ 1. Hai phương trình $2x - 5 = 0$ và $3x - \frac{15}{2} = 0$ tương đương với nhau vì cùng có nghiệm duy nhất là $x = \frac{5}{2}$.

2. Phép biến đổi tương đương

Để giải một phương trình, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các ***phép biến đổi tương đương***.

Định lí sau đây nêu lên một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng.

ĐỊNH LÍ

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức ;

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

CHÚ Ý

Chuyển vế và đổi dấu một biểu thức thực chất là thực hiện phép cộng hay trừ hai vế với biểu thức đó.

Kí hiệu. Ta dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương của các phương trình.



5

Tìm sai lầm trong phép biến đổi sau

$$x+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1-\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x=1.$$

3. Phương trình hệ quả

*Nếu mọi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là **phương trình hệ quả** của phương trình $f(x) = g(x)$.*

Ta viết

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x).$$

Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta gọi đó là ***nghiệm ngoại lai***.

Khi giải phương trình, không phải lúc nào cũng áp dụng được phép biến đổi tương đương. Trong nhiều trường hợp ta phải thực hiện các phép biến đổi đưa tới phương trình hệ quả, chẳng hạn bình phương hai vế, nhân hai vế của phương trình với một đa thức. Lúc đó để loại nghiệm ngoại lai, ta phải thử lại các nghiệm tìm được.

Đối với phương trình nhiều ẩn, ta cũng có các khái niệm tương tự.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\frac{x+3}{x(x-1)}+\frac{3}{x}=\frac{2-x}{x-1}. \qquad (4)$$

Giải. Điều kiện của phương trình (4) là $x \neq 0$ và $x \neq 1$.

Nhân hai vế của phương trình (4) với $x(x-1)$ ta đưa tới phương trình hệ quả

$$(4) \Rightarrow x+3+3(x-1)=x(2-x).$$

$$\Rightarrow x^2+2x=0$$

$$\Rightarrow x(x+2)=0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -2$.

Ta thấy $x = 0$ không thoả mãn điều kiện của phương trình (4), đó là nghiệm ngoại lai nên bị loại, còn $x = -2$ thoả mãn điều kiện và là một nghiệm của phương trình (4).

Vậy phương trình (4) có nghiệm duy nhất là $x = -2$.

Bài tập

1. Cho hai phương trình

$$3x = 2 \text{ và } 2x = 3.$$

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình đã cho. Hỏi

a) Phương trình nhận được có tương đương với một trong hai phương trình đã cho hay không ?

b) Phương trình đó có phải là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho hay không ?

2. Cho hai phương trình

$$4x = 5 \text{ và } 3x = 4.$$

Nhân các vế tương ứng của hai phương trình đã cho. Hỏi

a) Phương trình nhận được có tương đương với một trong hai phương trình đã cho hay không ?

b) Phương trình đó có phải là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho hay không ?

3. Giải các phương trình

a) $\sqrt{3-x} + x = \sqrt{3-x} + 1$;

b) $x + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 2$;

c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{9}{\sqrt{x-1}}$;

d) $x^2 - \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2} + 3$.

4. Giải các phương trình

a) $x + 1 + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x+5}{x+3}$;

b) $2x + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3x}{x-1}$;

c) $\dfrac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$;

d) $\dfrac{2x^2 - x - 3}{\sqrt{2x-3}} = \sqrt{2x-3}$.



PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

I – ÔN TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

1. Phương trình bậc nhất

Cách giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$ được tóm tắt trong bảng sau

$ax + b = 0$ (1)		
Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) *có nghiệm duy nhất* $x = -\frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	(1) *vô nghiệm*
	$b = 0$	(1) *nghiệm đúng với mọi* x

Khi $a \neq 0$ phương trình $ax + b = 0$ được gọi là *phương trình bậc nhất một ẩn.*



1

Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$m(x - 4) = 5x - 2.$$

2. Phương trình bậc hai

Cách giải và công thức nghiệm của phương trình bậc hai được tóm tắt trong bảng sau

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ (2)	
$\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
$\Delta > 0$	(2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	(2) có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	(2) vô nghiệm


2
Lập bảng trên với biệt thức thu gọn Δ'.

3. Định lí Vi-ét

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$


3
Khẳng định "Nếu a và c trái dấu thì phương trình (2) có hai nghiệm và hai nghiệm đó trái dấu" có đúng không ? Tại sao ?

II – PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

Có nhiều phương trình khi giải có thể biến đổi về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai. Sau đây ta xét hai trong các dạng phương trình đó.

1. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối ta có thể dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối hoặc bình phương hai vế để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$|x - 3| = 2x + 1. \qquad (3)$$

Giải

Cách 1

a) Nếu $x \geq 3$ thì phương trình (3) trở thành $x - 3 = 2x + 1$. Từ đó $x = -4$.

Giá trị $x = -4$ không thoả mãn điều kiện $x \geq 3$ nên bị loại.

b) Nếu $x < 3$ thì phương trình (3) trở thành $-x + 3 = 2x + 1$. Từ đó $x = \frac{2}{3}$.

Giá trị này thoả mãn điều kiện $x < 3$ nên là nghiệm.

Kết luận. Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{2}{3}$.

Cách 2. Bình phương hai vế của phương trình (3) ta đưa tới phương trình hệ quả

$$
\begin{aligned}
(3) &\Rightarrow (x-3)^2 = (2x+1)^2 \\
&\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4x^2 + 4x + 1 \\
&\Rightarrow 3x^2 + 10x - 8 = 0.
\end{aligned}
$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x = -4$ và $x = \frac{2}{3}$.

Thử lại ta thấy phương trình (3) chỉ có nghiệm là $x = \frac{2}{3}$.

Kết luận. Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{2}{3}$.

2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Để giải các phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai, ta thường bình phương hai vế để đưa về một phương trình hệ quả không chứa ẩn dưới dấu căn.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{2x-3} = x - 2. \qquad (4)$$

Giải. Điều kiện của phương trình (4) là $x \geq \frac{3}{2}$.

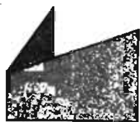
Bình phương hai vế của phương trình (4) ta đưa tới phương trình hệ quả

$$
\begin{aligned}
(4) &\Rightarrow 2x - 3 = x^2 - 4x + 4 \\
&\Rightarrow x^2 - 6x + 7 = 0.
\end{aligned}
$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x = 3 + \sqrt{2}$ và $x = 3 - \sqrt{2}$. Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện của phương trình (4), nhưng khi thay vào phương trình (4) thì giá trị $x = 3 - \sqrt{2}$ bị loại (vế trái dương còn vế phải âm), còn giá trị $x = 3 + \sqrt{2}$ là nghiệm (hai vế cùng bằng $\sqrt{2} + 1$).

Kết luận. Vậy nghiệm của phương trình (4) là $x = 3 + \sqrt{2}$.

BÀI ĐỌC THÊM



PHƯƠNG TRÌNH BẬC n

Sách giáo khoa bậc THCS và THPT đã trình bày công thức giải phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai. Công thức giải phương trình bậc ba mang tên nhà Toán học I-ta-li-a Các-đa-nô, tuy nhiên Các-đa-nô chỉ là người lần đầu tiên công bố công thức đó trong cuốn sách "Nghệ thuật vĩ đại hay các quy tắc của Đại số học" xuất bản năm 1545. Tác giả của công thức đó là nhà Toán học I-ta-li-a tên là Tác-ta-gli-a (Nicolo Tartaglia, 1500 – 1557).



G. CÁC-ĐA-NÔ
(Girolamo Cardano,
1501 – 1576)

Công thức Các-đa-nô cho các nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 + px + q = 0$ là

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Sau khi Tác-ta-gli-a tìm ra công thức này thì một học trò của Các-đa-nô là Phe-ra-ri (Ferrari, 1522 – 1565) đã tìm ra công thức giải phương trình bậc bốn, công thức này cũng đã được công bố trong cuốn sách của Các-đa-nô nêu trên.



N. A-BEN
(Niels Henrik Abel,
1802 – 1829)

Sau đó nhiều nhà toán học đã cố gắng để tìm công thức giải phương trình bậc năm, nhưng phải đến Thế kỉ XIX hai nhà toán học trẻ tuổi là A-ben người Na-uy và Ga-loa người Pháp mới chứng minh được rằng không thể giải được bằng căn thức phương trình đại số tổng quát bậc cao hơn 4.

Trong quá trình tìm cách giải phương trình đại số tổng quát bậc 5 bằng căn thức, A-ben đã giải thích tại sao các phương trình bậc 2, 3, 4 có thể giải được bằng căn thức, còn Ga-loa tìm ra điều kiện cần và đủ để một phương trình có bậc đã cho (có thể lớn hơn 4) giải được bằng căn thức. Công lao to lớn của Ga-loa qua công trình này là đã đặt nền móng cho Đại số hiện đại nghiên cứu các cấu trúc đại số như nhóm, vành, trường,...



E. GA-LOA
(Evariste Galois,
1811 – 1832)

Bài tập

1. Giải các phương trình

a) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x + 3} = \dfrac{2x - 5}{4}$;

b) $\dfrac{2x + 3}{x - 3} - \dfrac{4}{x + 3} = \dfrac{24}{x^2 - 9} + 2$;

c) $\sqrt{3x - 5} = 3$;

d) $\sqrt{2x + 5} = 2$.

2. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $m(x - 2) = 3x + 1$;

b) $m^2x + 6 = 4x + 3m$;

c) $(2m + 1)x - 2m = 3x - 2$.

3. Có hai rổ quýt chứa số quýt bằng nhau. Nếu lấy 30 quả ở rổ thứ nhất đưa sang rổ thứ hai thì số quả ở rổ thứ hai bằng $\dfrac{1}{3}$ của bình phương số quả còn lại ở rổ thứ nhất. Hỏi số quả quýt ở mỗi rổ lúc ban đầu là bao nhiêu ?

4. Giải các phương trình

a) $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$;

b) $3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

5. Giải các phương trình sau bằng máy tính bỏ túi (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba)

a) $2x^2 - 5x - 4 = 0$;

b) $-3x^2 + 4x + 2 = 0$.

c) $3x^2 + 7x + 4 = 0$;

d) $9x^2 - 6x - 4 = 0$.

Hướng dẫn cách giải câu a) : Nếu sử dụng máy tính CASIO *fx–500 MS*, ta ấn liên tiếp các phím

[MODE] [MODE] [1] [▶] [2] [2] [=] [(–)] [5] [=] [(–)] [4] [=]

màn hình hiện ra $x_1 = 3.137458609$.

Ấn tiếp

[=] màn hình hiện ra $x_2 = -0.637458608$.

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba ta được nghiệm gần đúng của phương trình là $x_1 \approx 3,137$ và $x_2 \approx -0,637$.

6. Giải các phương trình

a) $|3x - 2| = 2x + 3$;

b) $|2x - 1| = |-5x - 2|$;

c) $\frac{x-1}{2x-3} = \frac{-3x+1}{|x+1|}$;

d) $|2x+5| = x^2 + 5x + 1$.

7. Giải các phương trình

a) $\sqrt{5x+6} = x - 6$;

b) $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1$;

c) $\sqrt{2x^2+5} = x + 2$;

d) $\sqrt{4x^2+2x+10} = 3x + 1$.

8. Cho phương trình $3x^2 - 2(m+1)x + 3m - 5 = 0$.

Xác định m để phương trình có một nghiệm gấp ba nghiệm kia. Tính các nghiệm trong trường hợp đó.



§3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

I – ÔN TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

***Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y** có dạng tổng quát là*

$$ax + by = c \qquad (1)$$

trong đó a, b, c là các hệ số, với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.



1

Cặp (1 ; –2) có phải là một nghiệm của phương trình $3x - 2y = 7$ không ? Phương trình đó còn có những nghiệm khác nữa không ?

CHÚ Ý

a) Khi $a = b = 0$ ta có phương trình $0x + 0y = c$. Nếu $c \neq 0$ thì phương trình này vô nghiệm, còn nếu $c = 0$ thì mọi cặp số $(x_0 ; y_0)$ đều là nghiệm.

b) Khi $b \neq 0$, phương trình $ax + by = c$ trở thành

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}. \qquad (2)$$

Cặp số $(x_0 ; y_0)$ là một nghiệm của phương trình (1) khi và chỉ khi điểm $M(x_0 ; y_0)$ thuộc đường thẳng (2).

Tổng quát, người ta chứng minh được rằng phương trình bậc nhất hai ẩn luôn luôn có vô số nghiệm. ***Biểu diễn hình học tập nghiệm*** *của phương trình (1) là một đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ Oxy.*



2

Hãy biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình $3x - 2y = 6$.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn *có dạng tổng quát là*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (3)$$

trong đó x, y là hai ẩn ; các chữ còn lại là hệ số.

Nếu cặp số $(x_0 ; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0 ; y_0)$ được gọi là một ***nghiệm*** *của hệ phương trình* (3).

Giải hệ phương trình (3) *là tìm tập nghiệm của nó.*



3

a) Có mấy cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \, ? \end{cases}$$

b) Dùng phương pháp cộng đại số để giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ -2x + 4y = -3. \end{cases}$$

Có nhận xét gì về nghiệm của hệ phương trình này ?

II – HỆ BA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$ax + by + cz = d,$$

trong đó x, y, z là ba ẩn ; a, b, c, d là các hệ số và a, b, c không đồng thời bằng 0.

> ***Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn*** *có dạng tổng quát là*
>
> $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad (4)$$
>
> *trong đó x, y, z là ba ẩn ; các chữ còn lại là các hệ số.*
>
> *Mỗi bộ ba số $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ được gọi là một* ***nghiệm*** *của hệ phương trình (4).*

Chẳng hạn, $\left(\frac{17}{4} ; -\frac{3}{4} ; \frac{3}{2}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 \\ \quad 4y + 3z = \frac{3}{2} \\ \qquad 2z = 3, \end{cases} \qquad (5)$$

còn $\left(-\frac{7}{2} ; \frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \frac{1}{2} \\ 2x + 3y + 5z = -2 \\ -4x - 7y + z = -4. \end{cases} \qquad (6)$$

Hệ phương trình (5) có dạng đặc biệt, gọi là hệ phương trình ***dạng tam giác***.

Việc giải hệ phương trình dạng này rất đơn giản. Từ phương trình cuối tính được z rồi thay vào phương trình thứ hai ta tính được y và cuối cùng thay z và y tính được vào phương trình đầu sẽ tính được x.



4

Hãy giải hệ phương trình (5).

Mọi hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn đều biến đổi được về dạng tam giác, bằng phương pháp khử dần ẩn số(*). Chẳng hạn, sau đây là cách giải hệ phương trình (6).

Giải. Nhân hai vế của phương trình thứ nhất của hệ (6) với −2 rồi cộng vào phương trình thứ hai theo từng vế tương ứng, nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 4 rồi cộng vào phương trình thứ ba theo từng vế tương ứng, ta được hệ phương trình (đã khử x ở hai phương trình cuối)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \dfrac{1}{2} \\ -y + z = -3 \\ y + 9z = -2. \end{cases}$$

Tiếp tục cộng các vế tương ứng của phương trình thứ hai và phương trình thứ ba của hệ mới nhận được, ta được hệ phương trình tương đương dạng tam giác

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \dfrac{1}{2} \\ -y + z = -3 \\ 10z = -5. \end{cases}$$

Ta dễ dàng giải ra được

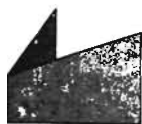
$$z = -\frac{1}{2},\ y = \frac{5}{2},\ x = -\frac{7}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$(x\ ;\ y\ ;\ z) = \left(-\frac{7}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right).$$

(*) Phương pháp này do nhà toán học Đức Gau-xơ (Gauss, 1777 – 1855) tìm ra, nên cũng còn gọi là phương pháp Gau-xơ.

BÀI ĐỌC THÊM



Trong kho tàng văn hoá dân gian Việt Nam có bài toán "Trăm trâu trăm cỏ" sau đây

Trăm trâu trăm cỏ,
Trâu đứng ăn năm,
Trâu nằm ăn ba,
Lụ khụ trâu già,
Ba con một bó.



Hỏi có bao nhiêu trâu đứng, bao nhiêu trâu nằm, bao nhiêu trâu già ?

Giải. Gọi số trâu đứng là x, số trâu nằm là y, số trâu già là z (x, y, z là những số nguyên dương nhỏ hơn 100). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \dfrac{1}{3}z = 100. \end{cases}$$

Đây là hệ hai phương trình bậc nhất ba ẩn, nếu không tính đến điều kiện của ẩn thì hệ phương trình này có vô số nghiệm (nếu khử z ta được một phương trình bậc nhất của hai ẩn $7x + 4y = 100$).

Tuy nhiên, vì x, y, z phải là những số nguyên dương nhỏ hơn 100, nên chỉ có một số hữu hạn nghiệm, cụ thể ở đây có ba nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 18 \\ z_1 = 78 ; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 8 \\ y_2 = 11 \\ z_2 = 81 ; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 12 \\ y_3 = 4 \\ z_3 = 84. \end{cases}$$

Bài toán dân gian ở trên thuộc loại phương trình Đi-ô-phăng (mang tên nhà toán học cổ Hi Lạp là Diophante).

Bài tập

1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x - 5y = 9 \\ 14x - 10y = 10. \end{cases}$$

Tại sao không cần giải ta cũng kết luận được hệ phương trình này vô nghiệm ?

2. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x - 2y = 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{3}{4}y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 0,3x - 0,2y = 0,5 \\ 0,5x + 0,4y = 1,2. \end{cases}$

3. Hai bạn Vân và Lan đến cửa hàng mua trái cây. Bạn Vân mua 10 quả quýt, 7 quả cam với giá tiền là 17 800 đồng. Bạn Lan mua 12 quả quýt, 6 quả cam hết 18 000 đồng. Hỏi giá tiền mỗi quả quýt và mỗi quả cam là bao nhiêu ?

4. Có hai dây chuyền may áo sơ mi. Ngày thứ nhất cả hai dây chuyền may được 930 áo. Ngày thứ hai do dây chuyền thứ nhất tăng năng suất 18%, dây chuyền thứ hai tăng năng suất 15% nên cả hai dây chuyền may được 1083 áo. Hỏi trong ngày thứ nhất mỗi dây chuyền may được bao nhiêu áo sơ mi ?

5. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + 2y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -7 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 3x + y - z = 5. \end{cases}$

6. Một cửa hàng bán áo sơ mi, quần âu nam và váy nữ. Ngày thứ nhất bán được 12 áo, 21 quần và 18 váy, doanh thu là 5 349 000 đồng. Ngày thứ hai bán được 16 áo, 24 quần và 12 váy, doanh thu là 5 600 000 đồng. Ngày thứ ba bán được 24 áo, 15 quần và 12 váy, doanh thu là 5 259 000 đồng. Hỏi giá bán mỗi áo, mỗi quần và mỗi váy là bao nhiêu ?

7. Giải các hệ phương trình sau bằng máy tính bỏ túi (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ 4x + 7y = -8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = 4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -5 \\ -4x + 5y - z = 6 \\ 3x + 4y - 3z = 7\,; \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + y + 2z = -3 \\ -2x - 3y + z = 5. \end{cases}$

Hướng dẫn cách giải câu a)

Nếu sử dụng máy tính CASIO *fx–500 MS* ta ấn liên tiếp dãy các phím

[MODE] [MODE] [1] [2] [3] [=] [(–)] [5] [=] [6] [=] [4] [=] [7] [=] [(–)] [8] [=]

thấy hiện ra trên màn hình $x = 0.048780487$.

Ấn tiếp phím [=] ta thấy màn hình hiện ra $y = -1.170731707$.

Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được nghiệm gần đúng của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x \approx 0{,}05 \\ y \approx -1{,}17. \end{cases}$$

Hướng dẫn cách giải câu c)

Nếu sử dụng máy tính CASIO *fx–500 MS* ta ấn liên tiếp dãy các phím

[MODE] [MODE] [1] [3] [2] [=] [(–)] [3] [=] [4] [=] [(–)] [5] [=] [(–)] [4] [=] [5] [=] [(–)] [1] [=] [6] [=] [3] [=] [4] [=] [(–)] [3] [=] [7] [=]

thấy hiện ra trên màn hình $x = 0.217821782$.

Ấn tiếp phím [=] ta thấy màn hình hiện ra $y = 1.297029703$.

Ấn tiếp phím [=] trên màn hình hiện ra $z = -0.386138613$.

Vậy nghiệm gần đúng của hệ phương trình là (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

$$\begin{cases} x \approx 0{,}22 \\ y \approx 1{,}30 \\ z \approx -0{,}39. \end{cases}$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Khi nào hai phương trình được gọi là tương đương ? Cho ví dụ.

2. Thế nào là phương trình hệ quả ? Cho ví dụ.

3. Giải các phương trình

a) $\sqrt{x-5}+x=\sqrt{x-5}+6$;

b) $\sqrt{1-x}+x=\sqrt{x-1}+2$;

c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{8}{\sqrt{x-2}}$;

d) $3+\sqrt{2-x}=4x^2-x+\sqrt{x-3}$.

4. Giải các phương trình

a) $\dfrac{3x+4}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{x^2-4}+3$;

b) $\dfrac{3x^2-2x+3}{2x-1}=\dfrac{3x-5}{2}$;

c) $\sqrt{x^2-4}=x-1$.

5. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases}-2x+5y=9\\ 4x+2y=11\end{cases}$;

b) $\begin{cases}3x+4y=12\\ 5x-2y=7\end{cases}$;

c) $\begin{cases}2x-3y=5\\ 3x+2y=8\end{cases}$;

d) $\begin{cases}5x+3y=15\\ 4x-5y=6.\end{cases}$

6. Hai công nhân được giao việc sơn một bức tường. Sau khi người thứ nhất làm được 7 giờ và người thứ hai làm được 4 giờ thì họ sơn được $\dfrac{5}{9}$ bức tường. Sau đó họ cùng làm việc với nhau trong 4 giờ nữa thì chỉ còn lại $\dfrac{1}{18}$ bức tường chưa sơn. Hỏi nếu mỗi người làm riêng thì sau bao nhiêu giờ mỗi người mới sơn xong bức tường ?

7. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}2x-3y+z=-7\\ -4x+5y+3z=6\\ x+2y-2z=5\end{cases}$;

b) $\begin{cases}x+4y-2z=1\\ -2x+3y+z=-6\\ 3x+8y-z=12.\end{cases}$

8. Ba phân số đều có tử số là 1 và tổng của ba phân số đó bằng 1. Hiệu của phân số thứ nhất và phân số thứ hai bằng phân số thứ ba, còn tổng của phân số thứ nhất và phân số thứ hai bằng 5 lần phân số thứ ba. Tìm các phân số đó.

9. Một phân xưởng được giao sản xuất 360 sản phẩm trong một số ngày nhất định. Vì phân xưởng tăng năng suất, mỗi ngày làm thêm được 9 sản phẩm so với định mức, nên trước khi hết hạn một ngày thì phân xưởng đã làm vượt số sản phẩm được giao là 5%. Hỏi nếu vẫn tiếp tục làm việc với năng suất đó thì khi đến hạn phân xưởng làm được tất cả bao nhiêu sản phẩm ?

10. Giải các phương trình sau bằng máy tính bỏ túi

a) $5x^2 - 3x - 7 = 0$; b) $3x^2 + 4x + 1 = 0$;

c) $0,2x^2 + 1,2x - 1 = 0$; d) $\sqrt{2}x^2 + 5x + \sqrt{8} = 0$.

11. Giải các phương trình

a) $|4x - 9| = 3 - 2x$; b) $|2x + 1| = |3x + 5|$.

12. Tìm hai cạnh của một mảnh vườn hình chữ nhật trong hai trường hợp

a) Chu vi là 94,4 m và diện tích là 494,55 m^2.

b) Hiệu của hai cạnh là 12,1 m và diện tích là 1089 m^2.

13. Hai người quét sân. Cả hai người cùng quét sân hết 1 giờ 20 phút, trong khi nếu chỉ quét một mình thì người thứ nhất quét hết nhiều hơn 2 giờ so với người thứ hai. Hỏi mỗi người quét sân một mình thì hết mấy giờ ?

Bài tập trắc nghiệm

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau

14. Điều kiện của phương trình $x + 2 - \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{\sqrt{4-3x}}{x+1}$ là

(A) $x > -2$ và $x \neq -1$; (B) $x > -2$ và $x < \dfrac{4}{3}$.

(C) $x > -2$, $x \neq -1$ và $x \leq \dfrac{4}{3}$; (D) $x \neq -2$ và $x \neq -1$.

15. Tập nghiệm của phương trình $\dfrac{(m^2+2)x+2m}{x} = 2$ trong trường hợp $m \neq 0$ là

(A) $\left\{-\dfrac{2}{m}\right\}$;   (B) $\varnothing$.

(C) $\mathbb{R}$;   (D) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

16. Nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

là

(A) $\left(-\dfrac{39}{26} ; \dfrac{3}{13}\right)$;   (B) $\left(-\dfrac{17}{13} ; \dfrac{-5}{13}\right)$;

(C) $\left(\dfrac{39}{26} ; \dfrac{1}{2}\right)$;   (D) $\left(-\dfrac{1}{3} ; \dfrac{17}{6}\right)$.

17. Nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 7 \\ -4x + 3y - 2z = 15 \\ -x - 2y + 3z = -5 \end{cases}$$

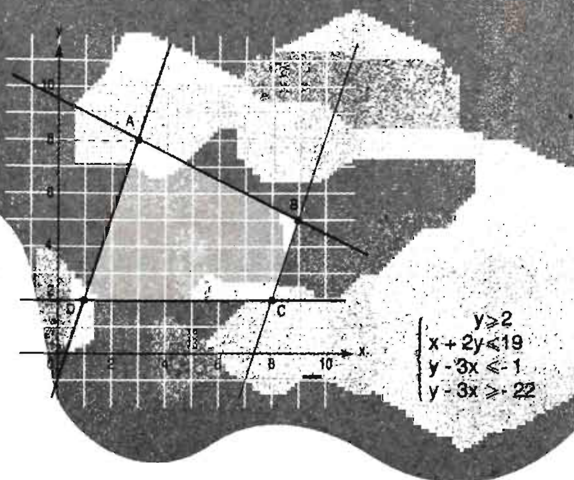
là

(A) $(-10 ; 7 ; 9)$;   (B) $\left(\dfrac{3}{2} ; -2 ; \dfrac{3}{2}\right)$;

(C) $\left(-\dfrac{1}{4} ; \dfrac{-9}{2} ; \dfrac{5}{4}\right)$;   (D) $(-5 ; -7 ; -8)$.

Chương IV

BẤT ĐẲNG THỨC
BẤT PHƯƠNG TRÌNH



Hai nội dung cơ bản của chương là bất đẳng thức và bất phương trình. Các vấn đề này đã được học từ những lớp dưới.

Chương này sẽ củng cố và hoàn thiện các kĩ năng chứng minh bất đẳng thức và giải bất phương trình. Ngoài các phép biến đổi tương đương, học sinh còn được học cách xét dấu nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai làm cơ sở cho việc giải các bất phương trình và hệ bất phương trình.

§1 BẤT ĐẲNG THỨC

I – ÔN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm bất đẳng thức


1

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

a) $3{,}25 < 4$;

b) $-5 > -4\frac{1}{4}$;

c) $-\sqrt{2} \leq 3$?


2

Chọn dấu thích hợp (=, <, >) để khi điền vào ô vuông ta được một mệnh đề đúng.

a) $2\sqrt{2}$ ☐ 3 ;

b) $\frac{4}{3}$ ☐ $\frac{2}{3}$;

c) $3 + 2\sqrt{2}$ ☐ $(1 + \sqrt{2})^2$;

d) $a^2 + 1$ ☐ 0 với a là một số đã cho.

*Các mệnh đề dạng "a < b" hoặc "a > b" được gọi là **bất đẳng thức**.*

2. Bất đẳng thức hệ quả và bất đẳng thức tương đương

*Nếu mệnh đề "$a < b \Rightarrow c < d$" đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là **bất đẳng thức hệ quả** của bất đẳng thức $a < b$ và cũng viết là $a < b \Rightarrow c < d$.*

Chẳng hạn, ta đã biết

$a < b$ và $b < c \Rightarrow a < c$ (tính chất bắc cầu).

$a < b$, c tuỳ ý $\Rightarrow a + c < b + c$ (tính chất cộng hai vế bất đẳng thức với một số).

Nếu bất đẳng thức a < b là hệ quả của bất đẳng thức c < d và ngược lại thì ta nói hai ***bất đẳng thức tương đương*** *với nhau và viết là* $a < b \Leftrightarrow c < d$.


3

Chứng minh rằng $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

3. Tính chất của bất đẳng thức

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức $a < b$ ta chỉ cần chứng minh $a - b < 0$. Tổng quát hơn, khi so sánh hai số, hai biểu thức hoặc chứng minh một bất đẳng thức, ta có thể sử dụng các tính chất của bất đẳng thức được tóm tắt trong bảng sau

Tính chất		***Tên gọi***
Điều kiện	***Nội dung***	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một luỹ thừa
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	


4

Nêu ví dụ áp dụng một trong các tính chất trên.

CHÚ Ý

Ta còn gặp các mệnh đề dạng $a \leq b$ hoặc $a \geq b$. Các mệnh đề dạng này cũng được gọi là bất đẳng thức. Để phân biệt, ta gọi chúng là các ***bất đẳng thức không ngặt*** và gọi các bất đẳng thức dạng $a < b$ hoặc $a > b$ là các ***bất đẳng thức ngặt***. Các tính chất nêu trong bảng trên cũng đúng cho bất đẳng thức không ngặt.

II – BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN (BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI)

1. Bất đẳng thức Cô-si(*)

ĐỊNH LÍ

Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng.

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \forall a, b \geq 0. \tag{1}$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ *xảy ra khi và chỉ khi* $a = b$.

Chứng minh

Ta có $\quad \sqrt{ab} - \dfrac{a+b}{2} = -\dfrac{1}{2}(a + b - 2\sqrt{ab}) = -\dfrac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq 0.$

Vậy $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, tức là khi và chỉ khi $a = b$.

2. Các hệ quả

HỆ QUẢ 1

Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad \forall a > 0.$$

(*) Augustin Louis – Cauchy, 1789 – 1857.

HỆ QUẢ 2

Nếu x, y cùng dương và có tổng không đổi thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi x = y.

Chứng minh. Đặt $S = x + y$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

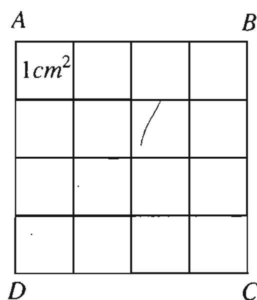
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{S}{2}, \text{ do đó } xy \leq \frac{S^2}{4}.$$

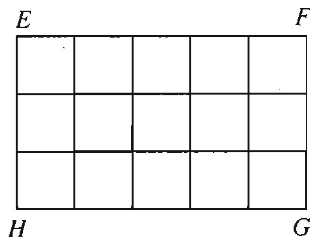
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{S}{2}$.

Vậy tích xy đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{S^2}{4}$ khi và chỉ khi $x = y = \frac{S}{2}$.

Ý NGHĨA HÌNH HỌC

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất (h.26).





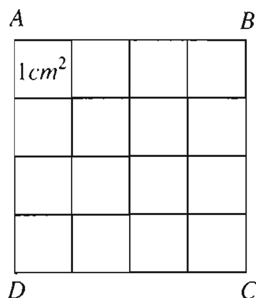
Hình 26

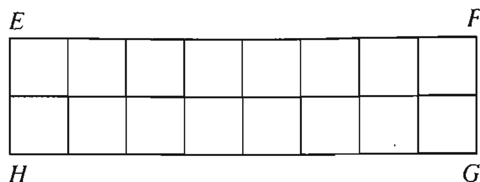
HỆ QUẢ 3

Nếu x, y cùng dương và có tích không đổi thì tổng x + y nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y.

Ý NGHĨA HÌNH HỌC

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất (h.27).





Hình 27


5
Hãy chứng minh hệ quả 3.

III – BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI


6
Nhắc lại định nghĩa giá trị tuyệt đối và tính giá trị tuyệt đối của các số sau

a) 0 ; b) 1,25 ; c) $-\frac{3}{4}$; d) $-\pi$.

Từ định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có các tính chất cho trong bảng sau

Điều kiện	***Nội dung***
	$\|x\| \geq 0, \|x\| \geq x, \ \|x\| \geq -x$
$a > 0$	$\|x\| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$\|x\| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $x \geq a$
	$\|a\| - \|b\| \leq \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

Ví dụ. Cho $x \in [-2\ ;\ 0]$. Chứng minh rằng $|x + 1| \leq 1$.

Giải

$$x \in [-2\ ;\ 0] \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$$
$$\Rightarrow -2 + 1 \leq x + 1 \leq 0 + 1$$
$$\Rightarrow -1 \leq x + 1 \leq 1$$
$$\Rightarrow |x + 1| \leq 1.$$

Bài tập

1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng với mọi giá trị của x ?

a) $8x > 4x$; b) $4x > 8x$;

c) $8x^2 > 4x^2$; d) $8 + x > 4 + x$.

2. Cho số $x > 5$, số nào trong các số sau đây là số nhỏ nhất ?

$A = \frac{5}{x}$; $B = \frac{5}{x} + 1$; $C = \frac{5}{x} - 1$; $D = \frac{x}{5}$.

3. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

a) Chứng minh $(b - c)^2 < a^2$;

b) Từ đó suy ra $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

4. Chứng minh rằng

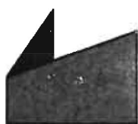
$$x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2, \forall x \geq 0, \forall y \geq 0.$$

5. Chứng minh rằng

$$x^4 - \sqrt{x^5} + x - \sqrt{x} + 1 > 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Hướng dẫn. Đặt $\sqrt{x} = t$, xét hai trường hợp $0 \leq x < 1$; $x \geq 1$.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, trên các tia Ox và Oy lần lượt lấy các điểm A và B thay đổi sao cho đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính 1. Xác định toạ độ của A và B để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.



CHỈ DẪN LỊCH SỬ



A. CÔ-SI
(Augustin Louis Cauchy, 1789 – 1857)

Cô-si là nhà toán học Pháp. Ông nghiên cứu nhiều lĩnh vực Toán học khác nhau, công bố hơn 800 công trình về Số học, Lí thuyết số, Đại số, Giải tích toán học, Phương trình vi phân, Cơ học lí thuyết, Cơ học thiên thể, Vật lí toán.

Các công trình của Cô-si cho thấy rõ nhược điểm của việc dựa vào trực giác hình học để suy ra các kết quả tế nhị của Giải tích. Ông định nghĩa một cách chính xác các khái niệm giới hạn và liên tục của hàm số. Ông xây dựng một cách chặt chẽ Lí thuyết hội tụ của chuỗi, đưa ra khái niệm bán kính hội tụ.

Ông định nghĩa tích phân là giới hạn của các tổng tích phân và chứng minh sự tồn tại tích phân của các hàm số liên tục. Ông phát triển cơ sở của Lí thuyết hàm số biến số phức. Về Hình học, về Đại số, về Lí thuyết số, về Cơ học, về Quang học, về Thiên văn học, Cô-si đều có những cống hiến lớn lao.

§2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

I – KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1. Bất phương trình một ẩn


1

Cho một ví dụ về bất phương trình một ẩn, chỉ rõ vế trái và vế phải của bất phương trình này.

> ***Bất phương trình ẩn x*** *là mệnh đề chứa biến có dạng*
>
> $$f(x) < g(x) \qquad (f(x) \le g(x)) \qquad (1)$$
>
> *trong đó* $f(x)$ và $g(x)$ *là những biểu thức của* x.
>
> *Ta gọi* $f(x)$ *và* $g(x)$ *lần lượt là vế trái và vế phải của bất phương trình* (1). *Số thực* x_0 *sao cho* $f(x_0) < g(x_0)$ $(f(x_0) \le g(x_0))$ *là mệnh đề đúng được gọi là một* ***nghiệm của bất phương trình*** (1).
>
> ***Giải bất phương trình*** *là tìm tập nghiệm của nó, khi tập nghiệm rỗng thì ta nói bất phương trình vô nghiệm.*

CHÚ Ý

Bất phương trình (1) cũng có thể viết lại dưới dạng sau

$$g(x) > f(x) \qquad (g(x) \ge f(x)).$$



2

Cho bất phương trình $2x \leq 3$.

a) Trong các số -2 ; $2\frac{1}{2}$; π ; $\sqrt{10}$ số nào là nghiệm, số nào không là nghiệm của bất phương trình trên ?

b) Giải bất phương trình đó và biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số.

2. Điều kiện của một bất phương trình

Tương tự đối với phương trình, ta gọi các điều kiện của ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa là ***điều kiện xác định*** *(hay gọi tắt là* ***điều kiện) của bất phương trình*** (1).

Chẳng hạn điều kiện của bất phương trình

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1} \leq x^2$$

là $3 - x \geq 0$ và $x + 1 \geq 0$.

3. Bất phương trình chứa tham số

Trong một bất phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là ***tham số***. Giải và biện luận bất phương trình chứa tham số là xét xem với các giá trị nào của tham số bất phương trình vô nghiệm, bất phương trình có nghiệm và tìm các nghiệm đó. Chẳng hạn

$$(2m-1)x + 3 < 0$$

$$x^2 - mx + 1 \geq 0$$

có thể được coi là những bất phương trình ẩn x tham số m.

II – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Hệ bất phương trình ẩn x *gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng.*

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một ***nghiệm*** *của hệ bất phương trình đã cho.*

Giải hệ bất phương trình *là tìm tập nghiệm của nó.*

Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

Ví dụ 1. Giải hệ bất phương trình

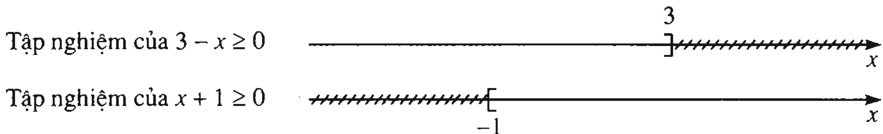
$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Giải. Giải từng bất phương trình ta có

$$3 - x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq x$$

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Biểu diễn trên trục số các tập nghiệm của các bất phương trình này ta được



Giao của hai tập hợp trên là đoạn $[-1 ; 3]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $[-1 ; 3]$ hay còn có thể viết là $-1 \leq x \leq 3$.

III – MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Bất phương trình tương đương



3

Hai bất phương trình trong ví dụ 1 có tương đương hay không ? Vì sao ?

> Ta đã biết *hai bất phương trình có cùng tập nghiệm* (có thể rỗng) *là hai **bất phương trình tương đương*** và *dùng kí hiệu* "⇔" *để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.*
>
> *Tương tự, khi hai hệ bất phương trình có cùng một tập nghiệm ta cũng nói chúng tương đương với nhau và dùng kí hiệu "⇔" để chỉ sự tương đương đó.*

2. Phép biến đổi tương đương

> *Để giải một bất phương trình (hệ bất phương trình) ta liên tiếp biến đổi nó thành những bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương cho đến khi được bất phương trình (hệ bất phương trình) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay tập nghiệm. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các **phép biến đổi tương đương.***

Chẳng hạn khi giải hệ bất phương trình trong ví dụ 1 ta có thể viết

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq x \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

Dưới đây ta sẽ lần lượt xét một số phép biến đổi thường sử dụng khi giải bất phương trình.

3. Cộng (trừ)

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\boxed{P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)}$$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$(x + 2)(2x - 1) - 2 \leq x^2 + (x - 1)(x + 3).$$

Phân tích bài toán

Khai triển và rút gọn từng vế ta được bất phương trình

$$2x^2 + 3x - 4 \leq 2x^2 + 2x - 3.$$

Chuyển vế và đổi dấu các hạng tử của vế phải bất phương trình này (thực chất là cộng hai vế của bất phương trình với biểu thức $-(2x^2 + 2x - 3)$ ta được một bất phương trình đã biết cách giải.

Giải

$$(x + 2)(2x - 1) - 2 \leq x^2 + (x - 1)(x + 3)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - x - 2 - 2 \leq x^2 + x^2 - x + 3x - 3$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 4 \leq 2x^2 + 2x - 3$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 4 - (2x^2 + 2x - 3) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x \leq 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty\,;\,1]$.

Nhận xét. Nếu cộng hai vế của bất phương trình $P(x) < Q(x) + f(x)$ với biểu thức $-f(x)$ ta được bất phương trình $P(x) - f(x) < Q(x)$. Do đó

$$\boxed{P(x) < Q(x) + f(x) \Leftrightarrow P(x) - f(x) < Q(x).}$$

Như vậy chuyển vế và đổi dấu một hạng tử trong một bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

4. Nhân (chia)

Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị dương (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) ta được một bất phương trình tương đương. Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị âm (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) và đổi chiều bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x)$ nếu $f(x) > 0, \forall x$
$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x)$ nếu $f(x) < 0, \forall x$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2} > \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

Phân tích bài toán. Mẫu thức của hai vế bất phương trình là những biểu thức luôn dương. Nhân hai vế của bất phương trình với hai biểu thức luôn dương đó, ta được một bất phương trình tương đương.

Giải

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2} > \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 + 1) > (x^2 + x)(x^2 + 2)$

$\Leftrightarrow x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$

$\Leftrightarrow x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 - x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x > 0$

$\Leftrightarrow -x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1.$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 1$.

5. Bình phương

Bình phương hai vế của một bất phương trình có hai vế không âm mà không làm thay đổi điều kiện của nó ta được một bất phương trình tương đương.

$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x)$ nếu $P(x) \geq 0, Q(x) \geq 0, \forall x$

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2+2x+2} > \sqrt{x^2-2x+3}.$$

Giải. Hai vế bất phương trình đều có nghĩa và dương với mọi x. Bình phương hai vế bất phương trình này ta được

$$\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2 > \left(\sqrt{x^2-2x+3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+2 > x^2-2x+3$$

$$\Leftrightarrow 4x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{4}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{1}{4}$.

6. Chú ý

Trong quá trình biến đổi một bất phương trình thành bất phương trình tương đương cần chú ý những điều sau

1) Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình thì điều kiện của bất phương trình có thể bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của một bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thoả mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình

$$\frac{5x+2\sqrt{3-x}}{4} - 1 > \frac{x}{4} - \frac{4-3\sqrt{3-x}}{6}.$$

Giải. Điều kiện $3 - x \geq 0$.

Ta có

$$\frac{5x+2\sqrt{3-x}}{4} - 1 > \frac{x}{4} - \frac{4-3\sqrt{3-x}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{4} + \frac{\sqrt{3-x}}{2} - 1 > \frac{x}{4} - \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3-x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{4} + \frac{\sqrt{3-x}}{2} - 1 - \frac{x}{4} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3-x}}{2} > 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{3} > 0.$$

Kết hợp với điều kiện của bất phương trình, ta có nghiệm của bất phương trình là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{3} > 0 \\ 3 - x \geq 0. \end{cases}$$

Hệ bất phương trình này có nghiệm là $\dfrac{1}{3} < x \leq 3$.

Kết luận. Nghiệm của bất phương trình đã cho là $\dfrac{1}{3} < x \leq 3$.

> *2) Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình $P(x) < Q(x)$ với biểu thức $f(x)$ ta cần lưu ý đến điều kiện về dấu của $f(x)$. Nếu $f(x)$ nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm thì ta phải lần lượt xét từng trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến một hệ bất phương trình.*

Ta minh hoạ điều này qua ví dụ sau.

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $\dfrac{1}{x-1} \geq 1$.

Giải. Điều kiện $x \neq 1$.

a) Khi $x - 1 < 0$ (tức là $x < 1$) ta có $\dfrac{1}{x-1} < 0$. Do đó trong trường hợp này mọi $x < 1$ đều không là nghiệm của bất phương trình hay bất phương trình vô nghiệm.

b) Khi $x - 1 > 0$ (tức là $x > 1$), nhân hai vế của bất phương trình đã cho với $x - 1$ ta được bất phương trình tương đương $1 \geq x - 1$. Như vậy trong trường hợp này nghiệm của bất phương trình đã cho là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 1 \geq x - 1 \\ x > 1. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm là $1 < x \leq 2$.

Kết luận. Nghiệm của bất phương trình đã cho là $1 < x \leq 2$.

> *3) Khi giải bất phương trình $P(x) < Q(x)$ mà phải bình phương hai vế thì ta lần lượt xét hai trường hợp :*
>
> *a) $P(x)$, $Q(x)$ cùng có giá trị không âm, ta bình phương hai vế bất phương trình.*
>
> *b) $P(x)$, $Q(x)$ cùng có giá trị âm ta viết*
>
> $$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow -Q(x) < -P(x)$$
>
> *rồi bình phương hai vế bất phương trình mới.*

Ví dụ 7. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 + \frac{17}{4}} > x + \frac{1}{2}.$$

Giải. Hai vế của bất phương trình có nghĩa với mọi x.

a) Khi $x + \frac{1}{2} < 0$ (tức là $x < -\frac{1}{2}$), vế phải của bất phương trình âm, vế trái dương nên trong trường hợp này mọi $x < -\frac{1}{2}$ đều là nghiệm của bất phương trình.

b) Khi $x + \frac{1}{2} \geq 0$ (tức là $x \geq -\frac{1}{2}$), hai vế của bất phương trình đã cho đều không âm nên bình phương hai vế của nó ta được bất phương trình tương đương $x^2 + \frac{17}{4} > x^2 + x + \frac{1}{4}$. Như vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho trong trường hợp này là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2 + \frac{17}{4} > x^2 + x + \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm là $-\frac{1}{2} \leq x < 4$.

Tổng hợp lại, nghiệm của bất phương trình đã cho bao gồm

$$x < -\frac{1}{2} \text{ và } -\frac{1}{2} \leq x < 4.$$

Kết luận. Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < 4$.

Bài tập

Tìm các giá trị x thoả mãn điều kiện của mỗi bất phương trình sau

a) $\frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}$;

b) $\frac{1}{x^2 - 4} \leq \frac{2x}{x^2 - 4x + 3}$;

c) $2|x| - 1 + \sqrt[3]{x-1} < \frac{2x}{x+1}$;

d) $2\sqrt{1-x} > 3x + \frac{1}{x+4}$.

2. Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm

a) $x^2 + \sqrt{x+8} \le -3$;

b) $\sqrt{1 + 2(x-3)^2} + \sqrt{5 - 4x + x^2} < \frac{3}{2}$;

c) $\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{7 + x^2} > 1$.

3. Giải thích vì sao các cặp bất phương trình sau tương đương ?

a) $-4x + 1 > 0$ và $4x - 1 < 0$;

b) $2x^2 + 5 \le 2x - 1$ và $2x^2 - 2x + 6 \le 0$;

c) $x + 1 > 0$ và $x + 1 + \frac{1}{x^2 + 1} > \frac{1}{x^2 + 1}$;

d) $\sqrt{x - 1} \ge x$ và $(2x + 1)\sqrt{x - 1} \ge x(2x + 1)$.

4. Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{3x + 1}{2} - \frac{x - 2}{3} < \frac{1 - 2x}{4}$;

b) $(2x - 1)(x + 3) - 3x + 1 \le (x - 1)(x + 3) + x^2 - 5$.

5. Giải các hệ bất phương trình

a) $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x + 3}{2} < 2x + 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \frac{3x - 14}{2}. \end{cases}$



DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I – ĐỊNH LÍ VỀ DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

1. Nhị thức bậc nhất

> ***Nhị thức bậc nhất*** *đối với* x *là biểu thức dạng* $f(x) = ax + b$ *trong đó* a, b *là hai số đã cho,* $a \neq 0$.



1

a) Giải bất phương trình $-2x + 3 > 0$ và biểu diễn trên trục số tập nghiệm của nó.

b) Từ đó hãy chỉ ra các khoảng mà nếu x lấy giá trị trong đó thì nhị thức $f(x) = -2x + 3$ có giá trị

Trái dấu với hệ số của x ;

Cùng dấu với hệ số của x.

2. Dấu của nhị thức bậc nhất

ĐỊNH LÍ

> *Nhị thức* $f(x) = ax + b$ *có giá trị cùng dấu với hệ số* a *khi* x *lấy các giá trị trong khoảng* $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, *trái dấu với hệ số* a *khi* x *lấy các giá trị trong khoảng* $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Chứng minh. Ta có $f(x) = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$.

Với $x > -\frac{b}{a}$ thì $x + \frac{b}{a} > 0$ nên $f(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ cùng dấu với hệ số a.

Với $x < -\frac{b}{a}$ thì $x + \frac{b}{a} < 0$ nên $f(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ trái dấu với hệ số a.

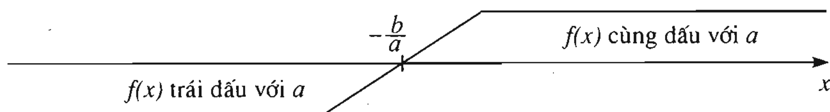
Các kết quả trên được thể hiện qua bảng sau

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $-\dfrac{b}{a}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x) = ax + b$	trái dấu với a $\quad$ 0 $\quad$ cùng dấu với a

Ta gọi bảng này là *bảng xét dấu* nhị thức $f(x) = ax + b$.

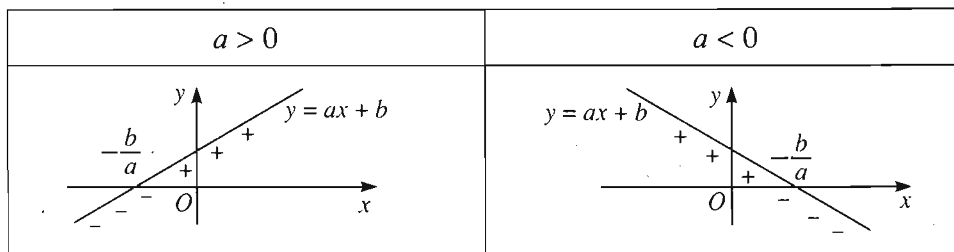
Khi $x = -\dfrac{b}{a}$ nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị bằng 0, ta nói số $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ là nghiệm của nhị thức $f(x)$.

Nghiệm $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ của nhị thức chia trục số thành hai khoảng (h.28).



Hình 28

Minh hoạ bằng đồ thị



3. Áp dụng



2

Xét dấu các nhị thức $\quad f(x) = 3x + 2, \quad g(x) = -2x + 5.$

Ví dụ 1. Xét dấu nhị thức $f(x) = mx - 1$ với m là một tham số đã cho.

Giải. Nếu $m = 0$ thì $f(x) = -1 < 0$, với mọi x.

Nếu $m \neq 0$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \dfrac{1}{m}$.

Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp $m > 0$, $m < 0$ như sau

$m > 0$	x	$-\infty$		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
	$f(x)$		$-$	0	$+$	

$m < 0$	x	$-\infty$		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
	$f(x)$		$+$	0	$-$	

II – XÉT DẤU TÍCH, THƯƠNG CÁC NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Giả sử $f(x)$ là một tích của những nhị thức bậc nhất. Áp dụng định lí về dấu của nhị thức bậc nhất có thể xét dấu từng nhân tử. Lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức bậc nhất có mặt trong $f(x)$ ta suy ra được dấu của $f(x)$. Trường hợp $f(x)$ là một thương cũng được xét tương tự.

Ví dụ 2. Xét dấu biểu thức

$$f(x) = \frac{(4x-1)(x+2)}{-3x+5}.$$

Giải

$f(x)$ không xác định khi $x = \frac{5}{3}$. Các nhị thức $4x - 1$, $x + 2$, $-3x + 5$ có các nghiệm viết theo thứ tự tăng là -2 ; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{3}$. Các nghiệm này chia khoảng $(-\infty; +\infty)$ thành bốn khoảng, trong mỗi khoảng các nhị thức đang xét có dấu hoàn toàn xác định.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$4x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-3x + 5$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

Từ bảng xét dấu ta thấy

$f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty ; -2)$ hoặc $x \in \left(\frac{1}{4} ; \frac{5}{3}\right)$;

$f(x) < 0$ khi $x \in \left(-2 ; \frac{1}{4}\right)$ hoặc $x \in \left(\frac{5}{3} ; +\infty\right)$;

$f(x) = 0$ khi $x = -2$ hoặc $x = \frac{1}{4}$.

$f(x)$ không xác định khi $x = \frac{5}{3}$ (trong bảng kí hiệu bởi ||).



3

Xét dấu biểu thức $f(x) = (2x - 1)(-x + 3)$.

III – ÁP DỤNG VÀO GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Giải bất phương trình $f(x) > 0$ thực chất là xét xem biểu thức $f(x)$ nhận giá trị dương với những giá trị nào của x (do đó cũng biết $f(x)$ nhận giá trị âm với những giá trị nào của x), làm như vậy ta nói đã *xét dấu* biểu thức $f(x)$.

1. Bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\frac{1}{1-x} \geq 1.$$

Giải. Ta biến đổi tương đương bất phương trình đã cho

$$\frac{1}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 0.$$

Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ta suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là $0 \leq x < 1$.



4

Giải bất phương trình $x^3 - 4x < 0$.

2. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Một trong những cách giải bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối là sử dụng định nghĩa để khử dấu giá trị tuyệt đối. Ta thường phải xét bất phương trình trong nhiều khoảng (nửa khoảng, đoạn) khác nhau, trên đó các biểu thức nằm trong dấu giá trị tuyệt đối đều có dấu xác định.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$|-2x+1| + x - 3 < 5.$$

Giải.

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối ta có

$$|-2x+1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{nếu } -2x+1 \geq 0 \\ -(-2x+1) & \text{nếu } -2x+1 < 0. \end{cases}$$

Do đó ta xét bất phương trình trong hai khoảng

a) Với $x \leq \dfrac{1}{2}$ ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2} \\ (-2x+1) + x - 3 < 5 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2} \\ -x < 7. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $-7 < x \leq \dfrac{1}{2}$.

b) Với $x > \dfrac{1}{2}$ ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ (2x-1) + x - 3 < 5 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x < 3. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $\dfrac{1}{2} < x < 3$.

Tổng hợp lại tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp của hai khoảng $\left(-7 ; \dfrac{1}{2}\right]$ và $\left(\dfrac{1}{2} ; 3\right)$.

Kết luận. Bất phương trình đã cho có nghiệm là $-7 < x < 3$.

Bằng cách áp dụng tính chất của giá trị tuyệt đối (§1) ta có thể dễ dàng giải các bất phương trình dạng $|f(x)| \le a$ và $|f(x)| \ge a$ với $a > 0$ đã cho.

Ta có

$$|f(x)| \le a \Leftrightarrow -a \le f(x) \le a$$
$$|f(x)| \ge a \Leftrightarrow f(x) \le -a \text{ hoặc } f(x) \ge a. \quad (a > 0)$$

Bài tập

1. Xét dấu các biểu thức

a) $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$;

b) $f(x) = (-3x - 3)(x + 2)(x + 3)$;

c) $f(x) = \dfrac{-4}{3x + 1} - \dfrac{3}{2 - x}$;

d) $f(x) = 4x^2 - 1$.

2. Giải các bất phương trình

a) $\dfrac{2}{x - 1} \le \dfrac{5}{2x - 1}$;

b) $\dfrac{1}{x + 1} < \dfrac{1}{(x - 1)^2}$;

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x + 4} < \dfrac{3}{x + 3}$;

d) $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} < 1$.

3. Giải các bất phương trình

a) $|5x - 4| \ge 6$;

b) $\left|\dfrac{-5}{x + 2}\right| < \left|\dfrac{10}{x - 1}\right|$.



§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Ta cũng gặp những bất phương trình nhiều ẩn số, chẳng hạn

$$2x + y^3 - z < 3 \ ; \ 3x + 2y < 1.$$

Khi $x = -2$, $y = 1$, $z = 0$ thì vế trái bất phương trình thứ nhất có giá trị nhỏ hơn vế phải của nó, ta nói bộ ba số $(x ; y ; z) = (-2 ; 1 ; 0)$ là một nghiệm của bất phương trình này.

Tương tự, cặp số $(x ; y) = (1 ; -2)$ là một nghiệm của bất phương trình thứ hai.

> ***Bất phương trình bậc nhất hai ẩn*** *x, y có dạng tổng quát là*
>
> $$ax + by \leq c \qquad (1)$$
>
> $$(ax + by < c \ ; \ ax + by \geq c \ ; \ ax + by > c)$$
>
> *trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.*

II – BIỂU DIỄN TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Cũng như bất phương trình bậc nhất một ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.

> *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm bất phương trình* (1) *được gọi là* ***miền nghiệm*** *của nó.*

Người ta đã chứng minh được rằng trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, đường thẳng $ax + by = c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng, một trong hai nửa mặt phẳng đó là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$, nửa mặt phẳng kia là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \geq c$.

Từ đó ta có *quy tắc thực hành* ***biểu diễn hình học tập nghiệm*** (hay ***biểu diễn miền nghiệm***) của bất phương trình $ax + by \leq c$ như sau (tương tự cho bất phương trình $ax + by \geq c$)

Bước 1. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường thẳng Δ :

$$ax + by = c.$$

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ *không thuộc* Δ *(ta thường lấy gốc toạ độ O)*

Bước 3. Tính $ax_0 + by_0$ *và so sánh* $ax_0 + by_0$ *với c.*

Bước 4. Kết luận

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ *thì nửa mặt phẳng bờ* Δ *chứa* M_0 *là miền nghiệm của* $ax + by \leq c$.

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ *thì nửa mặt phẳng bờ* Δ *không chứa* M_0 *là miền nghiệm của* $ax + by \leq c$.

CHÚ Ý

Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của bất phương trình

$$ax + by < c.$$

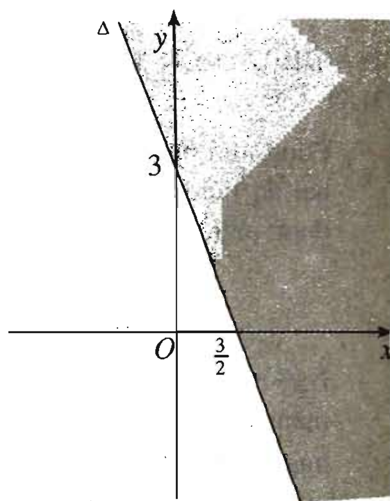
Ví dụ 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$2x + y \leq 3.$$

Giải

Vẽ đường thẳng $\Delta : 2x + y = 3$.

Lấy gốc toạ độ $O(0 ; 0)$, ta thấy $O \notin \Delta$ và có $2.0 + 0 < 3$ nên nửa mặt phẳng bờ Δ chứa gốc toạ độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho (miền không bị tô đậm trong hình 29).



Hình 29



1 Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$-3x + 2y > 0.$$

III – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn

> ***Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn*** *gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.*
>
> *Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể* ***biểu diễn hình học tập nghiệm*** *của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.*

Ví dụ 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Giải. Vẽ các đường thẳng

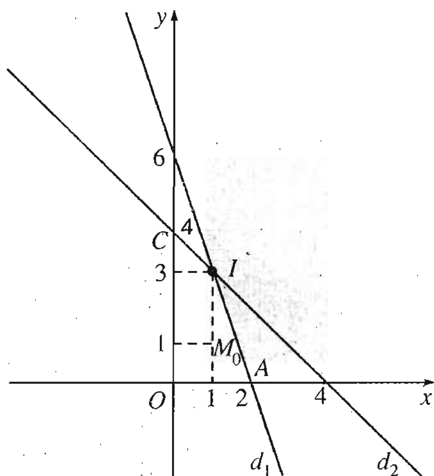
$(d_1) : 3x + y = 6$

$(d_2) : x + y = 4$

$(d_3) : x = 0$ (trục tung)

$(d_4) : y = 0$ (trục hoành).

Vì điểm $M_0(1\ ;\ 1)$ có toạ độ thoả mãn tất cả các bất phương trình trong hệ trên nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) không chứa điểm M_0. Miền không bị tô đậm (hình tứ giác *OCIA* kể cả bốn cạnh *AI*, *IC*, *CO*, *OA*) trong hình vẽ (h.30) là miền nghiệm của hệ đã cho.



Hình 30

2

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

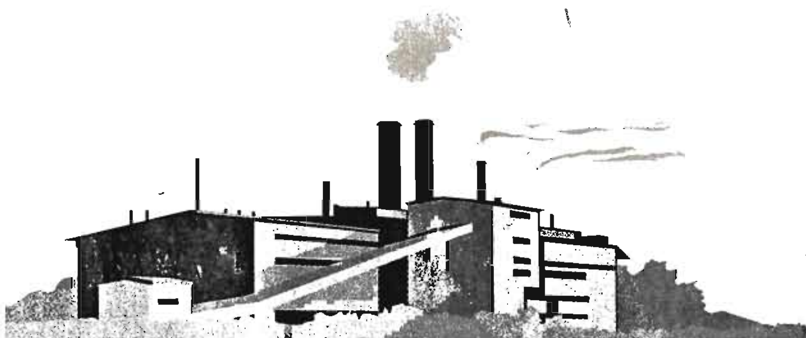
$$\begin{cases} 2x - y \le 3 \\ 2x + 5y \le 12x + 8. \end{cases}$$

IV – ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN KINH TẾ

Giải một số bài toán kinh tế thường dẫn đến việc xét những hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và giải chúng. Loại bài toán này được nghiên cứu trong một ngành toán học có tên gọi là *Quy hoạch tuyến tính*. Sau đây ta sẽ xét một bài toán đơn giản thuộc loại đó.

Bài toán. Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại II phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 một ngày chỉ làm việc không quá 4 giờ. Hãy đặt kế hoạch sản xuất sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

Giải. Gọi x, y theo thứ tự là số tấn sản phẩm loại I, loại II sản xuất trong một ngày ($x \ge 0$, $y \ge 0$). Như vậy tiền lãi mỗi ngày là $L = 2x + 1{,}6y$ (triệu đồng) và số giờ làm việc (mỗi ngày) của máy M_1 là $3x + y$ và máy M_2 là $x + y$.



Vì mỗi ngày máy M_1 chỉ làm việc không quá 6 giờ, máy M_2 không quá 4 giờ nên x, y phải thoả mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 3x + y \le 6 \\ x + y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases} \quad (2)$$

Bài toán trở thành

Trong các nghiệm của hệ bất phương trình (2), tìm nghiệm $(x = x_0 \; ; y = y_0)$ sao cho $L = 2x + 1{,}6y$ lớn nhất.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (2) là tứ giác *OAIC* kể cả miền trong (gọi là miền tứ giác *OAIC*) xem ví dụ ở mục III hình 30.

Người ta chứng minh được rằng biểu thức $L = 2x + 1{,}6y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác *OAIC* (xem bài đọc thêm). Tính giá trị của biểu thức $L = 2x + 1{,}6y$ tại tất cả các đỉnh của tứ giác *OAIC*, ta thấy L lớn nhất khi $x = 1$, $y = 3$.

Vậy để có số tiền lãi cao nhất, mỗi ngày cần sản xuất 1 tấn sản phẩm loại I và 3 tấn sản phẩm loại II.

BÀI ĐỌC THÊM



PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC $F = ax + by$ TRÊN MỘT MIỀN ĐA GIÁC

Bài toán. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ (a, b là hai số đã cho không đồng thời bằng 0), trong đó x, y là các toạ độ của các điểm

thuộc miền đa giác $A_1A_2... A_iA_{i+1}... A_n$. Xác định x, y để F đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

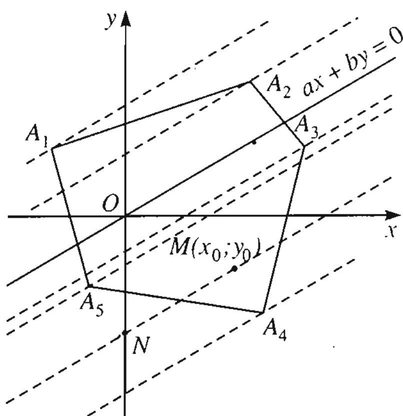
Giải (h.31). Ta minh hoạ cách giải trong trường hợp $n = 5$ và chỉ xét trường hợp $b > 0$ (các trường hợp còn lại xét tương tự). Giả sử $M(x_0 ; y_0)$ là một điểm đã cho thuộc miền đa giác. Qua điểm M và mỗi đỉnh của đa giác, kẻ các đường thẳng song song với đường thẳng $ax + by = 0$.

Trong các đường thẳng đó, đường thẳng qua điểm M có phương trình

$$ax + by = ax_0 + by_0$$

và cắt trục tung tại điểm $N\left(0 ; \dfrac{ax_0 + by_0}{b}\right)$.

Vì $b > 0$ nên $ax_0 + by_0$ lớn nhất khi và chỉ khi $\dfrac{ax_0 + by_0}{b}$ lớn nhất.



Hình 31

Trên hình 31, $F = ax + by$ lớn nhất khi $(x ; y)$ là toạ độ của điểm A_1, bé nhất khi $(x ; y)$ là toạ độ điểm A_4.

Tóm lại, giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức $F = ax + by$ đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác.

Bài tập

1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau.

a) $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$;

b) $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau.

a) $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} - 1 < 0 \\ x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3y}{2} \leq 2 \\ x \geq 0. \end{cases}$

3. Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc

các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi 3 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm II lãi 5 nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

Hướng dẫn : Áp dụng phương pháp giải trong mục IV.

§5 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

I – ĐỊNH LÍ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Tam thức bậc hai

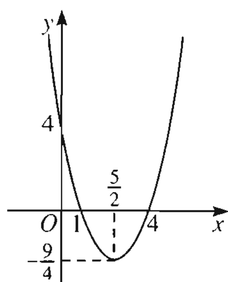
Tam thức bậc hai *đối với x là biểu thức có dạng* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *trong đó a, b, c là những hệ số,* $a \neq 0$.

 1

1) Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Tính $f(4), f(2), f(-1), f(0)$ và nhận xét về dấu của chúng.

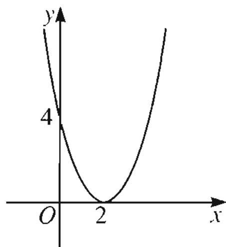
2) Quan sát đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ (h. 32a)) và chỉ ra các khoảng trên đó đồ thị ở phía trên, phía dưới trục hoành.

3) Quan sát các đồ thị trong hình 32 và rút ra mối liên hệ về dấu của giá trị $f(x) = ax^2 + bx + c$ ứng với x tuỳ theo dấu của biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.



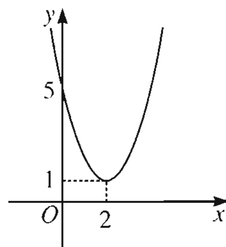
a)

$y = f(x) = x^2 - 5x + 4$



b)

$y = x^2 - 4x + 4$



c)

$y = x^2 - 4x + 5$

Hình 32

2. Dấu của tam thức bậc hai

Người ta đã chứng minh được định lí về *dấu tam thức bậc hai* sau đây

ĐỊNH LÍ

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta < 0$ *thì* $f(x)$ luôn *cùng dấu với hệ số a, với mọi* $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $\Delta = 0$ *thì* $f(x)$ *luôn cùng dấu với hệ số a, trừ khi* $x = \frac{-b}{2a}$.

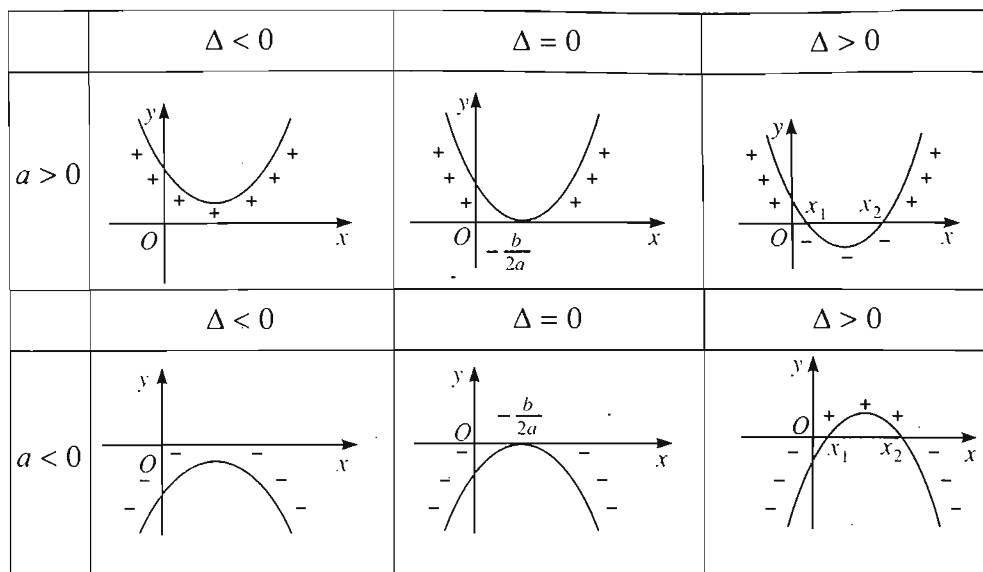
Nếu $\Delta > 0$ *thì* $f(x)$ *cùng dấu với hệ số a khi* $x < x_1$ *hoặc* $x > x_2$, *trái dấu với hệ số a khi* $x_1 < x < x_2$ *trong đó* x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ *là hai nghiệm của* $f(x)$.

CHÚ Ý

Trong định lí trên, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$.

Minh hoạ hình học

Định lí về dấu của tam thức bậc hai có minh hoạ hình học sau (h.33).



Hình 33

3. Áp dụng

Ví dụ 1

a) Xét dấu tam thức $f(x) = -x^2 + 3x - 5$.

b) Lập bảng xét dấu tam thức $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

Giải

a) $f(x)$ có $\Delta = -11 < 0$, hệ số $a = -1 < 0$ nên $f(x) < 0$, với mọi x.

b) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, hệ số $a = 2 > 0$.

Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	



2

Xét dấu các tam thức

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$; b) $g(x) = 9x^2 - 24x + 16$.

Tương tự như tích, thương của những nhị thức bậc nhất, ta có thể xét dấu tích, thương của các tam thức bậc hai.

Ví dụ 2. Xét dấu biểu thức

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}.$$

Giải. Xét dấu các tam thức $2x^2 - x - 1$ và $x^2 - 4$ rồi lập bảng xét dấu $f(x)$ ta được

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
$x^2 - 4$		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
$f(x)$		+	‖	−	0	+	0	−	‖	+	

II – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Bất phương trình bậc hai

Bất phương trình bậc hai ẩn x *là bất phương trình dạng* $ax^2 + bx + c < 0$ (*hoặc* $ax^2 + bx + c \le 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \ge 0$), *trong đó* a, b, c *là những số thực đã cho,* $a \ne 0$.

2. Giải bất phương trình bậc hai

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp $a < 0$) hay trái dấu với hệ số a (trường hợp $a > 0$).



3

Trong các khoảng nào

a) $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ trái dấu với hệ số của x^2 ?

b) $g(x) = -3x^2 + 7x - 4$ cùng dấu với hệ số của x^2 ?

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau

a) $3x^2 + 2x + 5 > 0$;

b) $-2x^2 + 3x + 5 > 0$;

c) $-3x^2 + 7x - 4 < 0$;

d) $9x^2 - 24x + 16 \geq 0$.

Giải

a) Tam thức $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ có $\Delta' = 1 - 3 \,.\, 5 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x)$ luôn dương (cùng dấu với a).

Do đó tập nghiệm của bất phương trình $3x^2 + 2x + 5 > 0$ là $(-\infty ; +\infty)$.

b) Tam thức $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ có hai nghiệm là $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{5}{2}$, hệ số $a = -2 < 0$, nên $f(x)$ luôn dương với mọi x thuộc khoảng $\left(-1 ; \frac{5}{2}\right)$.

Vậy bất phương trình $-2x^2 + 3x + 5 > 0$ có tập nghiệm là khoảng $\left(-1; \frac{5}{2}\right)$.

c) Tam thức $f(x) = -3x^2 + 7x - 4$ có hai nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{4}{3}$, hệ số $a = -3 < 0$, nên $f(x)$ luôn âm với mọi x thuộc khoảng $(-\infty ; 1)$ hoặc $\left(\frac{4}{3} ; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-3x^2 + 7x - 4 < 0$ là

$$(-\infty; 1) \cup \left(\frac{4}{3} ; +\infty\right).$$

d) Tam thức $f(x) = 9x^2 - 24x + 16$ có hệ số $a = 9$, $\Delta' = 12^2 - 9.16 = 0$, $f(x)$ có nghiệm kép $x = \frac{4}{3}$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \neq \frac{4}{3}$ và $f(x) = 0$ với $x = \frac{4}{3}$.

Vậy bất phương trình $9x^2 - 24x + 16 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi x.

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu

$$2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0.$$

Giải. Phương trình bậc hai sẽ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi các hệ số a và c trái dấu, tức là m phải thoả mãn điều kiện

$$2(2m^2 - 3m - 5) < 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 5 < 0.$$

Vì tam thức $f(m) = 2m^2 - 3m - 5$ có hai nghiệm là $m_1 = -1$, $m_2 = \frac{5}{2}$ và hệ số của m^2 dương nên

$$2m^2 - 3m - 5 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}.$$

Kết luận. Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $-1 < m < \frac{5}{2}$.

Bài tập

1. Xét dấu các tam thức bậc hai

a) $5x^2 - 3x + 1$;

b) $-2x^2 + 3x + 5$;

c) $x^2 + 12x + 36$;

d) $(2x - 3)(x + 5)$.

2. Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$;

b) $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$;

c) $f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9)$;

d) $f(x) = \dfrac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$.

3. Giải các bất phương trình sau

a) $4x^2 - x + 1 < 0$;

b) $-3x^2 + x + 4 \geq 0$;

c) $\dfrac{1}{x^2 - 4} < \dfrac{3}{3x^2 + x - 4}$;

d) $x^2 - x - 6 \leq 0$.

4. Tìm các giá trị của tham số m để các phương trình sau vô nghiệm

a) $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$;

b) $(3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. Sử dụng dấu bất đẳng thức để viết các mệnh đề sau

a) x là số dương ;

b) y là số không âm ;

c) Với mọi số thực α, $|\alpha|$ là số không âm ;

d) Trung bình cộng của hai số dương a và b không nhỏ hơn trung bình nhân của chúng.

2. Có thể rút ra kết luận gì về dấu của hai số a và b nếu biết

a) $ab > 0$;　　　　b) $\frac{a}{b} > 0$;

c) $ab < 0$;　　　　d) $\frac{a}{b} < 0$?

3. Trong các suy luận sau, suy luận nào đúng ?

(A) $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$;　　　　(B) $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} < 1$;

(C) $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$;　　　　(D) $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow x - y < 0$.

4. Khi cân một vật với độ chính xác đến 0,05kg, người ta cho biết kết quả là 26,4kg. Hãy chỉ ra khối lượng thực của vật đó nằm trong khoảng nào.

5. Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, hãy vẽ đồ thị hai hàm số $y = f(x) = x + 1$ và $y = g(x) = 3 - x$ và chỉ ra các giá trị nào của x thoả mãn :

a) $f(x) = g(x)$;

b) $f(x) > g(x)$;

c) $f(x) < g(x)$.

Kiểm tra lại kết quả bằng cách giải phương trình, bất phương trình.

6. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

7. Điều kiện của một bất phương trình là gì ? Thế nào là hai bất phương trình tương đương.

8. Nêu quy tắc biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$.

9. Phát biểu định lí về dấu của tam thức bậc hai.

10. Cho $a > 0$, $b > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

11. a) Bằng cách sử dụng hằng đẳng thức $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ hãy xét dấu

$$f(x) = x^4 - x^2 + 6x - 9$$

và

$$g(x) = x^2 - 2x - \frac{4}{x^2 - 2x}.$$

b) Hãy tìm nghiệm nguyên của bất phương trình sau

$$x(x^3 - x + 6) > 9.$$

12. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, chứng minh rằng

$$b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 > 0, \ \forall x.$$

13. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6. \end{cases}$$

Bài tập trắc nghiệm

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau

14. Số -2 thuộc tập nghiệm của bất phương trình

(A) $2x + 1 > 1 - x$;

(B) $(2x + 1)(1 - x) < x^2$;

(C) $\frac{1}{1 - x} + 2 \leq 0$;

(D) $(2 - x)(x + 2)^2 < 0$.

15. Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x} \leq 0$ tương đương với bất phương trình

(A) $\sqrt{x(x+1)^2} \leq 0$;　　(B) $(x+1)\sqrt{x} < 0$;

(C) $(x+1)^2\sqrt{x} \leq 0$;　　(D) $(x+1)^2\sqrt{x} < 0$.

16. Bất phương trình $mx^2 + (2m-1)x + m + 1 < 0$ có nghiệm khi

(A) $m = 1$;　　(B) $m = 3$;

(C) $m = 0$;　　(D) $m = 0{,}25$.

17. Hệ bất phương trình sau vô nghiệm

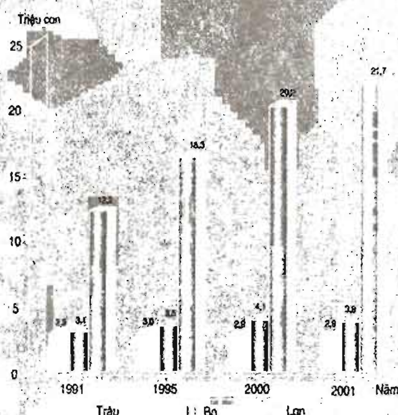
(A) $\begin{cases} x^2 - 2x \leq 0 \\ 2x + 1 < 3x + 2 \end{cases}$;　　(B) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ \dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x^2 - 5x + 2 < 0 \\ x^2 + 8x + 1 \leq 0 \end{cases}$;　　(D) $\begin{cases} |x-1| \leq 2 \\ |2x+1| \leq 3. \end{cases}$

Chương V

THỐNG KÊ





Thống kê là khoa học nghiên cứu các phương pháp thu thập, phân tích và xử lí các số liệu nhằm phát hiện các quy luật thống kê trong tự nhiên và xã hội. Chương này giúp học sinh nắm vững một số phương pháp trình bày số liệu (bằng bảng, biểu đồ) và thu gọn số liệu nhờ các số đặc trưng.



BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

I – ÔN TẬP

1. Số liệu thống kê

Khi thực hiện điều tra thống kê (theo mục đích đã định trước), cần xác định tập hợp các đơn vị điều tra, dấu hiệu điều tra và thu thập các số liệu.

Ví dụ 1.

Khi điều tra "Năng suất lúa hè thu năm 1998" của 31 tỉnh, người ta thu thập được các số liệu ghi trong bảng dưới đây

Năng suất lúa hè thu (tạ/ha) năm 1998 của 31 tỉnh

30	30	25	25	35	45	40	40	35	45	
25	45	30	30	30	40	30	25	45	45	
35	35	30	40	40	40	35	35	35	35	35

Bảng 1

Tập hợp các đơn vị điều tra là tập hợp 31 tỉnh, mỗi một tỉnh là một đơn vị điều tra. Dấu hiệu điều tra là *năng suất lúa hè thu năm 1998 ở mỗi tỉnh.* Các số liệu trong bảng 1 gọi là *các số liệu thống kê*, còn gọi là các giá trị của dấu hiệu.

2. Tần số

Trong 31 số liệu thống kê ở trên, ta thấy có 5 giá trị khác nhau là

$$x_1 = 25 \ ; \ x_2 = 30 \ ; \ x_3 = 35 \ ; \ x_4 = 40 \ ; \ x_5 = 45.$$

Giá trị $x_1 = 25$ xuất hiện 4 lần, ta gọi $n_1 = 4$ là *tần số* của giá trị x_1.

Tương tự, $n_2 = 7$; $n_3 = 9$; $n_4 = 6$; $n_5 = 5$ lần lượt là tần số của các giá trị x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5.

II – TẦN SUẤT

Trong 31 số liệu thống kê ở trên, giá trị x_1 có tần số là 4, do đó chiếm tỉ lệ là $\frac{4}{31} \approx 12,9\%$.

Tỉ số $\frac{4}{31}$ hay 12,9% được gọi là *tần suất* của giá trị x_1.

Tương tự, các giá trị x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5 lần lượt có tần suất là

$$\frac{7}{31} \approx 22,6\%\,;\ \frac{9}{31} \approx 29,0\%\ ;\frac{6}{31} \approx 19,4\%\,;\ \frac{5}{31} \approx 16,1\%.$$

Dựa vào các kết quả đã thu được, ta lập bảng sau

Năng suất lúa hè thu năm 1998 của 31 tỉnh

Năng suất lúa (tạ/ha)	Tần số	Tần suất (%)
25	4	12,9
30	7	22,6
35	9	29,0
40	6	19,4
45	5	16,1
Cộng	31	100 (%)

Bảng 2

Bảng 2 phản ánh tình hình năng suất lúa của 31 tỉnh, được gọi là *bảng phân bố tần số và tần suất*.

Nếu trong bảng 2, bỏ cột tần số ta được bảng *phân bố tần suất* ; bỏ cột tần suất ta được bảng *phân bố tần số*.

III – BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT GHÉP LỚP

Ví dụ 2. Để chuẩn bị may đồng phục cho học sinh, người ta đo chiều cao của 36 học sinh trong một lớp học và thu được các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Chiều cao của 36 học sinh (đơn vị : cm)

158	152	156	158	168	160	170	166	161	160	172	173
150	167	165	163	158	162	169	159	163	164	161	160
164	159	163	155	163	165	154	161	164	151	164	152

Bảng 3

Để xác định hợp lí số lượng quần áo cần may cho mỗi "kích cỡ" ta phân lớp các số liệu trên như sau

Lớp 1 gồm những số đo chiều cao từ 150 cm đến dưới 156 cm, kí hiệu là [150 ; 156) ;

Lớp 2 gồm những số đo chiều cao từ 156 cm đến dưới 162 cm, kí hiệu là [156 ; 162) ;

Lớp 3 gồm những số đo chiều cao từ 162 cm đến dưới 168 cm, kí hiệu là [162 ; 168) ;

Lớp 4 gồm những số đo chiều cao từ 168 cm đến 174 cm, kí hiệu là [168 ; 174].

Ta thấy có 6 số liệu thuộc vào lớp 1, ta gọi $n_1 = 6$ là *tần số của lớp* 1. Cũng vậy, ta gọi $n_2 = 12$ là tần số của lớp 2, $n_3 = 13$ là tần số của lớp 3, $n_4 = 5$ là tần số của lớp 4.

Các tỉ số

$$f_1 = \frac{6}{36} \approx 16{,}7\% \ ; \ f_2 = \frac{12}{36} \approx 33{,}3\% \ ;$$

$$f_3 = \frac{13}{36} \approx 36{,}1\% \ ; \ f_4 = \frac{5}{36} \approx 13{,}9\%$$

được gọi là *tần suất của các lớp* tương ứng.

Các kết quả trên được trình bày gọn trong bảng dưới đây

Chiều cao của 36 học sinh

Lớp số đo chiều cao (cm)	Tần số	Tần suất (%)
[150 ; 156)	6	16,7
[156 ; 162)	12	33,3
[162 ; 168)	13	36,1
[168 ; 174]	5	13,9
Cộng	36	100 (%)

Bảng 4

*Bảng 4 được gọi là **bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp**. Nếu trong bảng 4 bỏ cột tần số thì sẽ có **bảng phân bố tần suất ghép lớp**, bỏ cột tần suất thì sẽ có **bảng phân bố tần số ghép lớp**.*

Bảng 4 ở trên cho ta cơ sở để xác định số lượng quần áo cần may của mỗi cỡ (tương ứng với mỗi lớp). Chẳng hạn, vì số học sinh có chiều cao thuộc lớp thứ nhất chiếm 16,7% tổng số học sinh, nên số quần áo cần may thuộc cỡ tương ứng với lớp đó chiếm 16,7% số lượng quần áo cần may. Ta cũng có kết luận tương tự đối với các lớp khác.

Nếu lớp học kể trên đại diện được cho toàn trường thì có thể áp dụng kết quả đó để may quần áo cho học sinh cả trường.


Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Tiền lãi (nghìn đồng) của mỗi ngày trong 30 ngày được khảo sát ở một *quầy bán báo*

81	37	74	65	31	63	58	82	67	77	63	46	30	53	73
51	44	52	92	93	53	85	77	47	42	57	57	85	55	64

Bảng 5

Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp với các lớp như sau

[29,5 ; 40,5), [40,5 ; 51,5), [51,5 ; 62,5), [62,5 ; 73,5), [73,5 ; 84,5), [84,5 ; 95,5].

Bài tập

1. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Tuổi thọ của 30 bóng đèn điện được thắp thử (đơn vị : giờ)

1180	1150	1190	1170	1180	1170
1160	1170	1160	1150	1190	1180
1170	1170	1170	1190	1170	1170
1170	1180	1170	1160	1160	1160
1170	1160	1180	1180	1150	1170

a) Lập bảng phân bố tần số và bảng phân bố tần suất.

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy đưa ra nhận xét về tuổi thọ của các bóng đèn nói trên.

2. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

Lớp của độ dài (cm)	Tần số
[10 ; 20)	8
[20 ; 30)	18
[30 ; 40)	24
[40 ; 50]	10
Cộng	60



Bụi dương xỉ

a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp.

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy nêu rõ trong 60 lá dương xỉ được khảo sát :

Số lá có độ dài dưới 30 cm chiếm bao nhiêu phần trăm ?

Số lá có độ dài từ 30 cm đến 50 cm chiếm bao nhiêu phần trăm ?

3. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch được ở nông trường T (đơn vị : g).

90	73	88	99	100	102	111	96	79	93
81	94	96	93	95	82	90	106	103	116
109	108	112	87	74	91	84	97	85	92

Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp sau

[70 ; 80) ; [80 ; 90) ; [90 ; 100) ; [100 ; 110) ; [110 ; 120].

4. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Chiều cao của 35 cây bạch đàn (đơn vị : m)

6,6	7,5	8,2	8,2	7,8	7,9	9,0	8,9	8,2
7,2	7,5	8,3	7,4	8,7	7,7	7,0	9,4	8,7
8,0	7,7	7,8	8,3	8,6	8,1	8,1	9,5	6,9
8,0	7,6	7,9	7,3	8,5	8,4	8,0	8,8	

a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp, với các lớp sau

[6,5 ; 7,0) ; [7,0 ; 7,5) ; [7,5 ; 8,0) ; [8,0 ; 8,5) ; [8,5 ; 9,0) ; [9,0 ; 9,5].

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy nêu nhận xét về chiều cao của 35 cây bạch đàn nói trên.



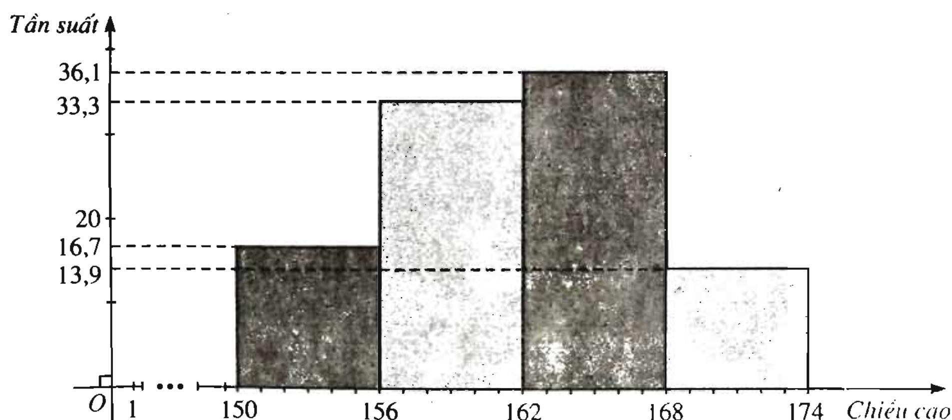
§2 BIỂU ĐỒ

I – BIỂU ĐỒ TẦN SUẤT HÌNH CỘT VÀ ĐƯỜNG GẤP KHÚC TẦN SUẤT

Ta có thể mô tả một cách trực quan các bảng phân bố tần suất (hoặc tần số), bảng phân bố tần suất (hoặc tần số) ghép lớp bằng biểu đồ hoặc đường gấp khúc.

1. Biểu đồ tần suất hình cột

Ví dụ 1. Để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp (bảng 4) trong §1, có thể vẽ ***biểu đồ tần suất hình cột*** sau (h.34).



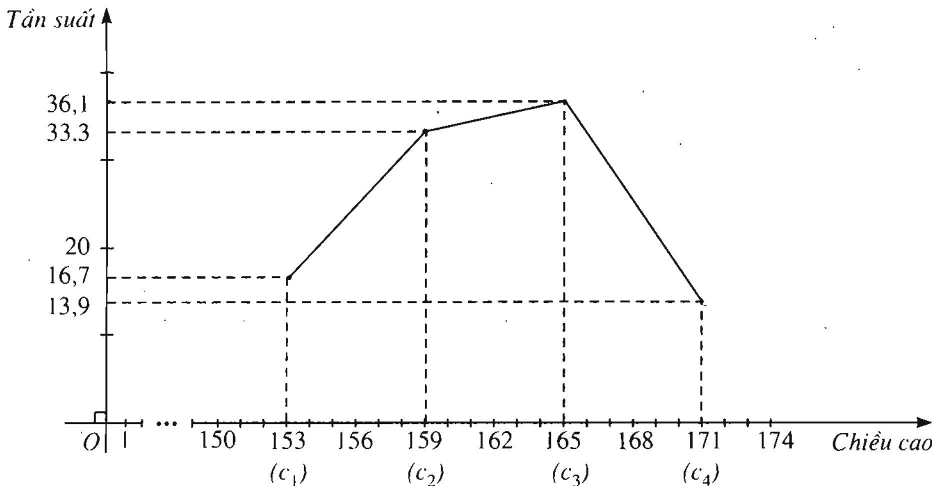
Hình 34. Biểu đồ tần suất hình cột về chiều cao (cm) của 36 học sinh.

2. Đường gấp khúc tần suất

Bảng phân bố tần suất ghép lớp kể trên (bảng 4) cũng có thể được mô tả bằng một đường gấp khúc, vẽ như sau.

Trên mặt phẳng toạ độ, xác định các điểm $(c_i ; f_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, trong đó c_i là trung bình cộng hai mút của lớp i (ta gọi c_i là ***giá trị đại diện của lớp** i*).

Vẽ các đoạn thẳng nối điểm $(c_i ; f_i)$ với điểm $(c_{i+1} ; f_{i+1})$, $i = 1, 2, 3$, ta thu được một đường gấp khúc, gọi là ***đường gấp khúc tần suất*** (h.35).



Hình 35. Đường gấp khúc tần suất về chiều cao (cm) của 36 học sinh.



1

Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp sau

Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Vinh từ 1961 đến 1990 (30 năm).

Lớp nhiệt độ (^oC)	Tần suất (%)
[15 ; 17)	16,7
[17 ; 19)	43,3
[19 ; 21)	36,7
[21 ; 23]	3,3
Cộng	100 (%)

Bảng 6

Hãy mô tả bảng 6 bằng cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất.

3. Chú ý

Ta cũng có thể mô tả bảng phân bố tần số ghép lớp bằng biểu đồ tần số hình cột hoặc đường gấp khúc tần số. Cách vẽ cũng như cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột hoặc đường gấp khúc tần suất, trong đó thay trục tần suất bởi trục tần số.

II – BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT

Người ta còn dùng biểu đồ hình quạt để mô tả bảng cơ cấu trong ví dụ dưới đây

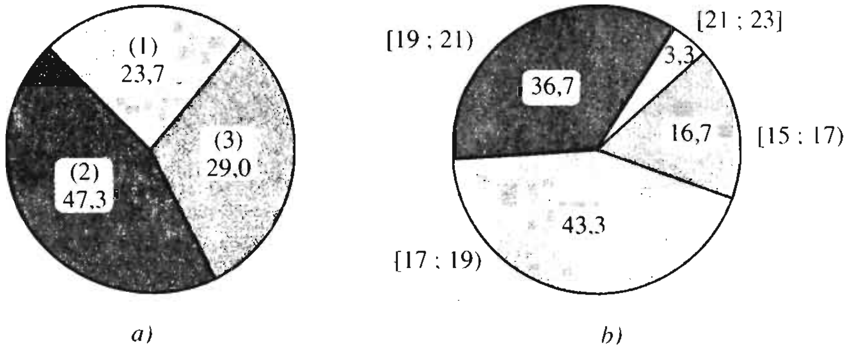
Ví dụ 2. Cho bảng 7

Cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước năm 1997, phân theo thành phần kinh tế.

Các thành phần kinh tế	Số phần trăm
(1) Khu vực doanh nghiệp nhà nước	23,7
(2) Khu vực ngoài quốc doanh	47,3
(3) Khu vực đầu tư nước ngoài	29,0
Cộng	100 (%)

Bảng 7

Hình 36a dưới đây là biểu đồ hình quạt mô tả bảng 7.



Hình 36

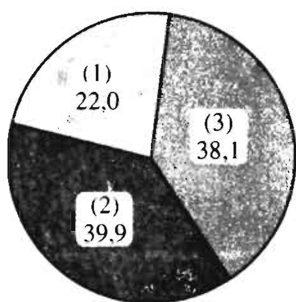
CHÚ Ý

Các bảng phân bố tần suất ghép lớp cũng có thể mô tả bằng biểu đồ hình quạt, chẳng hạn hình 36b mô tả bảng 6.



2

Dựa vào biểu đồ hình quạt cho ở hình 37 dưới đây, hãy lập bảng cơ cấu như trong ví dụ 2.



(1) Khu vực doanh nghiệp nhà nước
(2) Khu vực ngoài quốc doanh
(3) Khu vực đầu tư nước ngoài

Hình 37. Biểu đồ hình quạt về cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước năm 1999, phân theo thành phần kinh tế (%).

Bài tập

1. Hãy mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã được lập ở bài tập số 2 của §1 bằng cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất.

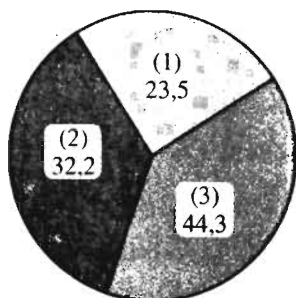
2. Xét bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp đã được lập ở bài tập số 3 của §1.

a) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất.

b) Hãy vẽ biểu đồ tần số hình cột, đường gấp khúc tần số.

c) Dựa vào biểu đồ tần suất hình cột đã vẽ ở câu a), hãy nêu nhận xét về khối lượng của 30 củ khoai tây được khảo sát.

3. Dựa vào biểu đồ hình quạt dưới đây (h.38), hãy lập bảng cơ cấu như trong ví dụ 2.



(1) Khu vực doanh nghiệp nhà nước
(2) Khu vực ngoài quốc doanh
(3) Khu vực đầu tư nước ngoài

Hình 38. Biểu đồ hình quạt về cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước năm 2000, phân theo thành phần kinh tế (%).

§3 SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MỐT

Để thu được các thông tin quan trọng từ các số liệu thống kê, người ta sử dụng những số đặc trưng như số trung bình cộng, số trung vị, mốt, phương sai, độ lệch chuẩn. Các số đặc trưng này phản ánh những khía cạnh khác nhau của dấu hiệu điều tra.

I – SỐ TRUNG BÌNH CỘNG (HAY SỐ TRUNG BÌNH)

Ví dụ 1

a) Áp dụng công thức tính số trung bình cộng đã học ở lớp 7, ta tính được chiều cao trung bình $\overline{x}$ của 36 học sinh trong kết quả điều tra được trình bày ở bảng 3 của §1 là $\overline{x} \approx 161$cm.

b) Sử dụng bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp, ta tính gần đúng chiều cao trung bình $\overline{x}$ của 36 học sinh trong kết quả điều tra được trình bày ở bảng 4 của §1 theo hai cách sau

Cách 1. ***Sử dụng bảng phân bố tần số ghép lớp***

Nhân giá trị đại diện của mỗi lớp với tần số của lớp đó, cộng các kết quả lại rồi chia cho 36, ta được

$$\frac{6 \times 153 + 12 \times 159 + 13 \times 165 + 5 \times 171}{36} \approx 162 \text{ (cm)}.$$

Kết quả này có nghĩa là chiều cao trung bình của 36 học sinh kể trên là $\overline{x} \approx 162$ cm.

Ta cũng nói 162 cm là *số trung bình cộng của bảng* 4.

Cách 2. ***Sử dụng bảng phân bố tần suất ghép lớp***

Nhân giá trị đại diện của mỗi lớp với tần suất của lớp đó rồi cộng các kết quả lại ta cũng được

$$\overline{x} \approx \frac{16,7}{100} \times 153 + \frac{33,3}{100} \times 159 + \frac{36,1}{100} \times 165 + \frac{13,9}{100} \times 171 \approx 162 \text{ (cm)}.$$

Vậy ta có thể tính số trung bình cộng của các số liệu thống kê theo các công thức sau đây.

Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k) = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k$$

trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i, n là số các số liệu thống kê ($n_1 + n_2 + ... + n_k = n$).

Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_kc_k) = f_1c_1 + f_2c_2 + ... + f_kc_k$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i, n là số các số liệu thống kê ($n_1 + n_2 + ...+ n_k = n$).


1

Cho bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp sau

Nhiệt độ trung bình của tháng 2 tại thành phố Vinh
từ 1961 đến hết 1990 (30 năm).

Lớp nhiệt độ (^oC)	Tần số	Tần suất (%)
[12 ; 14)	1	3,33
[14 ; 16)	3	10,00
[16 ; 18)	12	40,00
[18 ; 20)	9	30,00
[20 ; 22]	5	16,67
Cộng	30	100%

Bảng 8

a) Hãy tính số trung bình cộng của bảng 6 và bảng 8.

b) Từ kết quả đã tính được ở câu a), có nhận xét gì về nhiệt độ ở thành phố Vinh trong tháng 2 và tháng 12 (của 30 năm được khảo sát).

II – SỐ TRUNG VỊ

Ví dụ 2. Điểm thi Toán cuối năm của một nhóm 9 học sinh lớp 6 là

1 ; 1 ; 3 ; 6 ; 7 ; 8 ; 8 ; 9 ; 10.

Điểm trung bình của cả nhóm là $\overline{x} \approx 5,9$.

Ta thấy hầu hết học sinh (6 em) trong nhóm có số điểm vượt điểm trung bình và có những điểm vượt rất xa. Như vậy, điểm trung bình $\overline{x}$ không đại diện được cho trình độ học lực của các em trong nhóm.

Khi các số liệu thống kê có sự chênh lệch lớn thì số trung bình cộng không đại diện được cho các số liệu đó. Khi đó ta chọn số đặc trưng khác đại diện thích hợp hơn, đó là *số trung vị*.

> *Sắp thứ tự các số liệu thống kê thành dãy không giảm (hoặc không tăng).* ***Số trung vị*** *(của các số liệu thống kê đã cho) kí hiệu M_e là số đứng giữa dãy nếu số phần tử là lẻ và là trung bình cộng của hai số đứng giữa dãy nếu số phần tử là chẵn.*

Trong ví dụ 2 ta có $M_e = 7$.

Ví dụ 3. Điểm thi Toán của bốn học sinh lớp 6 được xếp thành dãy không giảm là 1 ; $\boxed{2,5 ; 8}$; 9,5.

Trong dãy này có hai số đứng giữa là 2,5 và 8.

Khi đó, ta chọn số trung vị là trung bình cộng của hai số này

$$M_e = \frac{2,5 + 8}{2} = 5,25.$$


2

Trong bảng phân bố tần số, các số liệu thống kê đã được sắp thứ tự thành dãy không giảm theo các giá trị của chúng.

Hãy tìm số trung vị của các số liệu thống kê cho ở bảng 9.

Số áo bán được trong một quý ở một cửa hàng bán áo sơ mi nam

Cỡ áo	36	37	38	39	40	41	42	Cộng
Tần số (số áo bán được)	13	45	126	110	126	40	5	465

Bảng 9

III – MỐT

Ở lớp 7 ta đã biết

> ***Mốt*** *của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_O.*

Nếu trong bảng phân bố tần số có hai giá trị có tần số bằng nhau và lớn hơn tần số của các giá trị khác thì chọn mốt là giá trị nào ? Ta xét bảng 9 ở trên.

Trong bảng 9, có hai giá trị là 38 và 40 cùng có tần số lớn nhất là 126, trong trường hợp này ta coi rằng có hai mốt là

$$M_O^{(1)} = 38, \quad M_O^{(2)} = 40.$$

Kết quả vừa thu được cho thấy rằng trong kinh doanh, cửa hàng nên ưu tiên nhập hai cỡ áo số 38 và số 40 nhiều hơn.

Bài tập

1. Tính số trung bình cộng của các bảng phân bố đã được lập ở bài tập số 1 và bài tập số 2 của §1.

2. Trong một trường THPT, để tìm hiểu tình hình học môn Toán của hai lớp 10A và 10B, người ta cho hai lớp thi Toán theo cùng một đề thi và lập được hai bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây

Điểm thi Toán của lớp 10A

Lớp điểm thi	Tần số
[0 ; 2)	2
[2 ; 4)	4
[4 ; 6)	12
[6 ; 8)	28
[8 ; 10]	4
Cộng	50

Điểm thi Toán của lớp 10B

Lớp điểm thi	Tần số
[0 ; 2)	4
[2 ; 4)	10
[4 ; 6)	18
[6 ; 8)	14
[8 ; 10]	5
Cộng	51

Tính các số trung bình cộng của hai bảng phân bố ở trên và nêu nhận xét về kết quả làm bài thi của hai lớp.

3. Điều tra tiền lương hàng tháng của 30 công nhân của một xưởng may, ta có bảng phân bố tần số sau

Tiền lương của 30 công nhân xưởng may

Tiền lương (nghìn đồng)	300	500	700	800	900	1000	Cộng
Tần số	3	5	6	5	6	5	30

Tìm mốt của bảng phân bố trên. Nêu ý nghĩa của kết quả đã tìm được.

4. Tiền lương hàng tháng của 7 nhân viên trong một công ti du lịch là : 650, 840, 690, 720, 2500, 670, 3000 (đơn vị : nghìn đồng).

Tìm số trung vị của các số liệu thống kê đã cho. Nêu ý nghĩa của kết quả đã tìm được.

5. Cho biết tình hình thu hoạch lúa vụ mùa năm 1980 của ba hợp tác xã ở địa phương V như sau

Hợp tác xã	Năng suất lúa (tạ/ha)	Diện tích trồng lúa (ha)
A	40	150
B	38	130
C	36	120

Hãy tính năng suất lúa trung bình của vụ mùa năm 1980 trong toàn bộ ba hợp tác xã kể trên.

§4 PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

I – PHƯƠNG SAI

Ví dụ 1. Cho biết giá trị thành phẩm quy ra tiền (nghìn đồng) trong một tuần lao động của 7 công nhân ở tổ 1 là

180, 190, 190, 200, 210, 210, 220, (1)

còn của 7 công nhân ở tổ 2 là

150, 170, 170, 200, 230, 230, 250. (2)

Ta thấy số trung bình cộng $\bar{x}$ của dãy (1) và số trung bình cộng $\bar{y}$ của dãy (2) bằng nhau

$$\bar{x} = \bar{y} = 200.$$

Tuy nhiên, khi so sánh dãy (1) và dãy (2) ta thấy các số liệu ở dãy (1) gần với số trung bình cộng hơn, nên chúng đồng đều hơn. Khi đó ta nói các số liệu thống kê ở dãy (1) ít phân tán hơn dãy (2).

*Để tìm số **đo độ phân tán** (so với số trung bình cộng) của dãy (1) ta tính*

Các độ lệch của mỗi số liệu thống kê đối với số trung bình cộng

(180 − 200) ; (190 − 200) ; (190 − 200) ; (200 − 200) ; (210 − 200) ; (210 − 200) ; (220 − 200).

Bình phương các độ lệch và tính trung bình cộng của chúng, ta được

$$s_1^2 = \frac{(180-200)^2 + 2(190-200)^2 + (200-200)^2 + 2(210-200)^2 + (220-200)^2}{7}$$

$$\approx 171,4.$$

Số s_1^2 được gọi là ***phương sai*** của dãy (1).

Tương tự phương sai s_2^2 của dãy (2) là

$$s_2^2 = \frac{(150-200)^2 + 2(170-200)^2 + (200-200)^2 + 2(230-200)^2 + (250-200)^2}{7}$$

$$\approx 1228,6.$$

Ta thấy phương sai của dãy (1) nhỏ hơn phương sai của dãy (2). Điều đó biểu thị độ phân tán của các số liệu thống kê ở dãy (1) ít hơn ở dãy (2).

Ví dụ 2. Tính phương sai s^2 của các số liệu thống kê cho ở bảng 4, §1 (cũng gọi là phương sai của bảng 4).

Số trung bình cộng của bảng 4 là $\bar{x} = 162$ cm.

Mỗi số liệu thống kê thuộc một lớp được thay thế bởi giá trị đại diện của lớp đó.

a) Phương sai s^2 của bảng 4 (bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp) được tính như sau

$$s^2 = \frac{6(153-162)^2 + 12(159-162)^2 + 13(165-162)^2 + 5(171-162)^2}{36}$$

$$\approx 31. \qquad (3)$$

Hệ thức (3) biểu thị cách tính gần đúng phương sai của bảng 4 theo tần số.

b) Từ (3) ta có

$$s^2 = \frac{6}{36}(153-162)^2 + \frac{12}{36}(159-162)^2 + \frac{13}{36}(165-162)^2 + \frac{5}{36}(171-162)^2$$

hay

$$s^2 \approx \frac{16,7}{100}(153-162)^2 + \frac{33,3}{100}(159-162)^2 + \frac{36,1}{100}(165-162)^2 + \frac{13,9}{100}(171-162)^2$$

$$\approx 31. \qquad (4)$$

Hệ thức (4) biểu thị cách tính gần đúng phương sai của bảng 4 theo tần suất.

CHÚ Ý

a) Khi hai dãy số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau hoặc xấp xỉ nhau, nếu phương sai càng nhỏ thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu thống kê càng bé.

b) Có thể tính phương sai theo các công thức sau đây

Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất

$$s^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \ldots + n_k(x_k-\overline{x})^2\right]$$
$$= f_1(x_1-\overline{x})^2 + f_2(x_2-\overline{x})^2 + \ldots + f_k(x_k-\overline{x})^2.$$

trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i ; n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$) ; $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp

$$s^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(c_1-\overline{x})^2 + n_2(c_2-\overline{x})^2 + \ldots + n_k(c_k-\overline{x})^2\right]$$
$$= f_1(c_1-\overline{x})^2 + f_2(c_2-\overline{x})^2 + \ldots + f_k(c_k-\overline{x})^2.$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ; n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$) ; $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu thống kê đã cho.

Ngoài ra, người ta còn chứng minh được công thức sau

$$\boxed{s^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2}$$

trong đó $\overline{x^2}$ là trung bình cộng của các bình phương số liệu thống kê, tức là

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + ... + n_kx_k^2) = f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + ... + f_kx_k^2$$

(đối với bảng phân bố tần số, tần suất),

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}(n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + ... + n_kc_k^2) = f_1c_1^2 + f_2c_2^2 + ... + f_kc_k^2$$

(đối với bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp).


1

Hãy tính phương sai của bảng 6 (ở §2).

II – ĐỘ LỆCH CHUẨN

Trong ví dụ 2 ở trên, ta đã tính được phương sai của bảng 4 (ở §1) bằng $s^2 \approx 31$. Nếu để ý đến đơn vị đo thì ta thấy đơn vị đo của s^2 là cm^2 (bình phương đơn vị đo của dấu hiệu được nghiên cứu). Muốn tránh điều này, có thể dùng *căn bậc hai của phương sai gọi là **độ lệch chuẩn*** (của bảng 4) và kí hiệu là s. Vậy

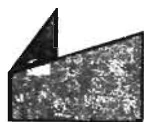
$$s = \sqrt{s^2} \approx \sqrt{31} \approx 5,6\ (cm).$$

Phương sai s^2 và độ lệch chuẩn s đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta dùng s, vì s có cùng đơn vị đo với dấu hiệu được nghiên cứu.


2

Hãy tính độ lệch chuẩn của bảng 6 (ở §2).

BÀI ĐỌC THÊM



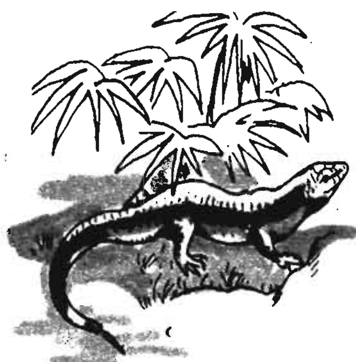
SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI CASIO *fx – 500MS* ĐỂ TÌM SỐ TRUNG BÌNH CỘNG VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Ví dụ. Cho bảng phân bố tần số

Khối lượng của 30 con thằn lằn

Khối lượng (gam)	140	150	160	170	180	190	Cộng
Tần số	2	3	5	9	8	3	30

Sử dụng máy tính bỏ túi CASIO*fx–500MS*, ta tìm số trung bình cộng $\bar{x}$ và độ lệch chuẩn s của bảng phân bố đã cho như sau



1. Chọn MODE cho phép tính thống kê :

ấn [MODE] [2]

2. Xoá những bài thống kê cũ

ấn lần lượt [SHIFT] [CLR] [1] [=].

3. Nhập dữ liệu

ấn liên tiếp 140 [SHIFT] [;] 2 [DT]

150 [SHIFT] [;] 3 [DT]

Tương tự đối với các cột 160, 170, 180, 190.

4. Gọi kết quả

a) Để tìm $\bar{x}$, ấn [SHIFT] [S–VAR] [1] [=]

Kết quả là $\bar{x}$ = 169 (gam).

b) Để tìm s, ấn [SHIFT] [S–VAR] [2] [=]

Kết quả cho giá trị $x\sigma n \approx 13{,}5$; đây chính là giá trị s cần tìm.

5. Chú ý

a) Không cần nhập đúng thứ tự của số liệu.

Để gọi dữ liệu (đã nhập), ấn [▲] hoặc [▼].

Có thể hiệu chỉnh số liệu hoặc tần số như sau

Gọi số liệu (hay tần số) đó, rồi nhập giá trị mới và ấn [=], giá trị mới sẽ thay thế giá trị cũ.

Có thể xoá một dữ liệu bằng cách gọi nó lên, rồi ấn [SHIFT] [CL] (các dữ liệu còn lại sẽ tự động dồn số thứ tự lại).

b) Đối với bảng phân bố tần số ghép lớp, ta sử dụng các giá trị đại diện của các lớp và làm tương tự.

Bài tập

1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số đã được lập ở bài tập 1 và của bảng phân bố tần số ghép lớp cho ở bài tập 2 của §1.

2. Hai lớp 10C, 10D của một trường Trung học phổ thông đồng thời làm bài thi môn Ngữ văn theo cùng một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số sau đây

Điểm thi Ngữ văn của lớp 10C

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	3	7	12	14	3	1	40

Điểm thi Ngữ văn của lớp 10D

Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
Tần số	8	18	10	4	40

a) Tính các số trung bình cộng, phương sai, độ lệch chuẩn của các bảng phân bố tần số đã cho.

b) Xét xem kết quả làm bài thi của môn Ngữ văn ở lớp nào là đồng đều hơn ?

3. Cho hai bảng phân bố tần số ghép lớp

Khối lượng của nhóm cá mè thứ 1

Lớp khối lượng (kg)	[0,6 ; 0,8)	[0,8 ; 1,0)	[1,0 ; 1,2)	[1,2 ; 1,4]	Cộng
Tần số	4	6	6	4	20

Khối lượng của nhóm cá mè thứ 2

Lớp khối lượng (kg)	[0,5 ; 0,7)	[0,7 ; 0,9)	[0,9 ; 1,1)	[1,1 ; 1,3)	[1,3 ; 1,5]	Cộng
Tần số	3	4	6	4	3	20

a) Tính các số trung bình cộng của các bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

b) Tính phương sai của các bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

c) Xét xem nhóm cá nào có khối lượng đồng đều hơn ?

ÔN TẬP CHƯƠNG V

1. Chỉ rõ các bước để

a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp ;

b) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp.

2. Nêu rõ cách tính số trung bình cộng, số trung vị, mốt, phương sai và độ lệch chuẩn.

3. Kết quả điều tra 59 hộ gia đình ở một vùng dân cư về số con của mỗi hộ gia đình được ghi trong bảng sau

3	2	1	1	1	1	0	2	4	0	3	0
1	3	0	2	2	2	1	3	2	2	3	3
2	2	4	3	2	2	4	3	2	4	1	3
0	1	3	2	3	1	4	3	0	2	2	1
2	1	2	0	4	2	3	1	1	2	0	

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ;

b) Nêu nhận xét về số con của 59 gia đình đã được điều tra ;

c) Tính số trung bình cộng, số trung vị, mốt của các số liệu thống kê đã cho.

4. Cho các số liệu thống kê được ghi trong hai bảng sau đây

Khối lượng (tính theo gam) của nhóm cá thứ 1

645	650	645	644	650	635	650	654
650	650	650	643	650	630	647	650
645	650	645	642	652	635	647	652

Khối lượng (tính theo gam) của nhóm cá thứ 2

640	650	645	650	643	645	650	650	642
640	650	645	650	641	650	650	649	645
640	645	650	650	644	650	650	645	640

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo nhóm cá thứ 1 với các lớp là

[630 ; 635) ; [635 ; 640) ; [640 ; 645) ; [645 ; 650) ; [650 ; 655] ;

b) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo nhóm cá thứ 2 với các lớp là

[638 ; 642) ; [642 ; 646) ; [646 ; 650) ; [650 ; 654] ;

c) Mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã được lập ở câu a) bằng cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất ;

d) Mô tả bảng phân bố tần số ghép lớp đã được lập ở câu b), bằng cách vẽ biểu đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số ;

e) Tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của các bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp đã lập được.

Từ đó, xét xem nhóm cá nào có khối lượng đồng đều hơn.

5. Cho các số liệu thống kê được ghi trong bảng sau

Mức lương hàng năm của các cán bộ và nhân viên trong một công ti (đơn vị : nghìn đồng)

20910	76000	20350	20060
21410	20110	21410	21360
20350	21130	20960	125000

Tìm mức lương bình quân của các cán bộ và nhân viên trong công ti, số trung vị của các số liệu thống kê đã cho.

Nêu ý nghĩa của số trung vị.

6. Người ta đã tiến hành thăm dò ý kiến của khách hàng về các mẫu 1, 2, 3, 4, 5 của một loại sản phẩm mới được sản xuất ở một nhà máy. Dưới đây là bảng phân bố tần số theo số phiếu tín nhiệm dành cho các mẫu kể trên.

Mẫu	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số	2100	1860	1950	2000	2090	10000

a) Tìm mốt của bảng phân bố tần số đã cho.

b) Trong sản xuất, nhà máy nên ưu tiên cho mẫu nào ?

Bài tập trắc nghiệm

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau

7. Cho bảng phân bố tần số

Tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong một công ti.

Tiền thưởng	2	3	4	5	6	Cộng
Tần số	5	15	10	6	7	43

Mốt của bảng phân bố tần số đã cho là

(A) 2 triệu đồng ; (B) 6 triệu đồng ;

(C) 3 triệu đồng ; (D) 5 triệu đồng.

8. Cho bảng phân bố tần số

Tuổi của 169 đoàn viên thanh niên

Tuổi	18	19	20	21	22	Cộng
Tần số	10	50	70	29	10	169

Số trung vị của bảng phân bố tần số đã cho là

(A) 18 tuổi ; (B) 20 tuổi ;

(C) 19 tuổi ; (D) 21 tuổi.

9. Cho dãy số liệu thống kê : 21, 23, 24, 25, 22, 20.

Số trung bình cộng của các số liệu thống kê đã cho là

(A) 23,5 ; (B) 22 ;

(C) 22,5 ; (D) 14.

10. Cho dãy số liệu thống kê : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Phương sai của các số liệu thống kê đã cho là

(A) 1 ; (B) 2 ;

(C) 3 ; (D) 4.

11. Ba nhóm học sinh gồm 10 người, 15 người, 25 người. Khối lượng trung bình của mỗi nhóm lần lượt là : 50 kg, 38 kg, 40 kg. Khối lượng trung bình của cả ba nhóm học sinh là

(A) 41,4 kg ; (B) 42,4 kg ;

(C) 26 kg ; (D) 37 kg.

Bài tập thực hành dành cho các nhóm học sinh

(mỗi nhóm từ 3 đến 5 học sinh)

Chọn một lớp học trong trường rồi thực hiện các hoạt động sau

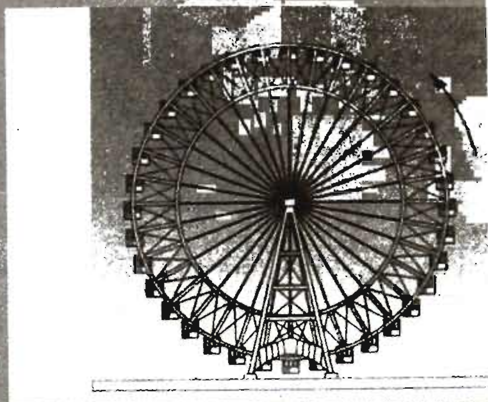
1. Điều tra và thu thập các số liệu thống kê trên lớp học đã chọn theo một dấu hiệu nào đó do nhóm tự lựa chọn (ví dụ như số anh chị em ruột của từng gia đình ; thời gian dành cho học Toán ở nhà của mỗi học sinh ; chiều cao của mỗi người trong lớp ; điểm kiểm tra Toán của từng học sinh trong kì kiểm tra gần nhất ; ...).

2. Trình bày, phân tích, xử lí các số liệu thống kê đã thu thập được.

3. Rút ra kết luận và đề xuất các kiến nghị.

Chương VI

CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC



Trong chương này, học sinh được cung cấp các khái niệm về đường tròn định hướng, cung và góc lượng giác (mở rộng khái niệm cung và góc hình học) chuẩn bị cho việc xây dựng khái niệm các hàm số lượng giác ở lớp 11. Cũng trong chương này, học sinh được học các công thức lượng giác cơ bản nhất và biết vận dụng các công thức này để thực hiện các biến đổi lượng giác.



CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

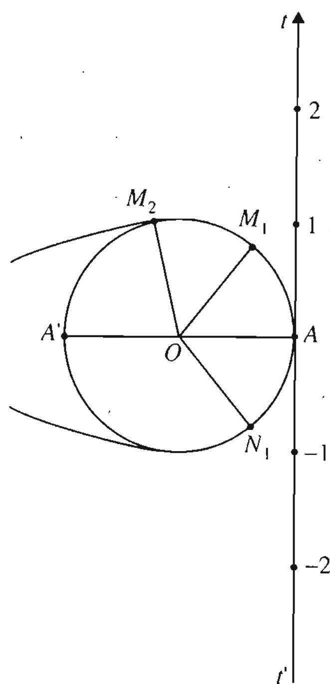
I – KHÁI NIỆM CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác

Cắt một hình tròn bằng bìa cứng, đánh dấu tâm O và đường kính AA'. Đính một sợi dây vào hình tròn tại A. Xem dây như một trục số $t't$, gốc tại A, đơn vị trên trục bằng bán kính OA. Như vậy hình tròn này có bán kính $R = 1$.

Cuốn dây áp sát đường tròn, điểm 1 trên trục $t't$ chuyển thành điểm M_1 trên đường tròn, điểm 2 chuyển thành điểm M_2, ... ; điểm -1 thành điểm N_1, ... (h.39).

Như vậy mỗi điểm trên trục số được đặt tương ứng với một điểm xác định trên đường tròn.



Hình 39

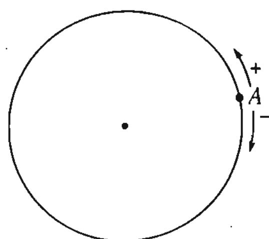
Nhận xét

a) Với cách đặt tương ứng này hai điểm khác nhau trên trục số có thể ứng với cùng một điểm trên đường tròn. Chẳng hạn điểm 1 trên trục số ứng với điểm M_1, nhưng khi cuốn quanh đường tròn một vòng nữa thì có một điểm khác trên trục số cũng ứng với điểm M_1.

b) Nếu ta cuốn tia At theo đường tròn như trên hình 39 thì mỗi số thực dương t ứng với một điểm M trên đường tròn. Khi t tăng dần thì điểm M chuyển động trên đường tròn theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ. Tương tự, nếu cuốn tia At' theo đường tròn thì mỗi số thực âm t ứng với một điểm M trên đường tròn và khi t giảm dần thì điểm M chuyển động trên đường tròn theo chiều quay của kim đồng hồ.

Ta đi tới khái niệm đường tròn định hướng sau đây :

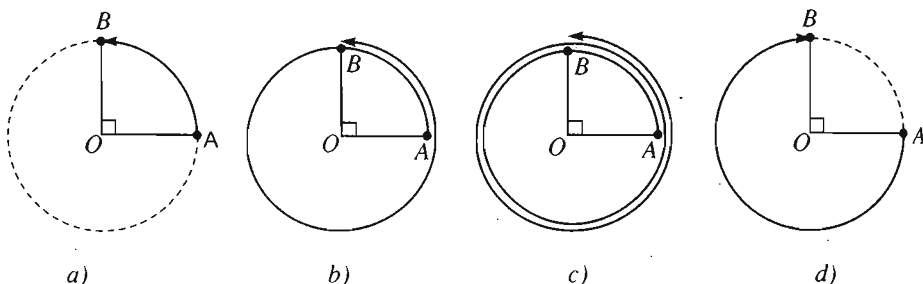
> ***Đường tròn định hướng*** *là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương* (h.40).



Hình 40

Trên đường tròn định hướng cho hai điểm A và B. Một điểm M di động trên đường tròn luôn theo một chiều (âm hoặc dương) từ A đến B tạo nên một ***cung lượng giác*** có điểm đầu A điểm cuối B.

Hình 41 cho ta hình ảnh của bốn cung lượng giác khác nhau có cùng điểm đầu A, điểm cuối B.



Hình 41

Ta có thể hình dung một điểm M di động trên đường tròn từ A đến B theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ, nó lần lượt tạo nên các cung tô đậm trên hình 41. Nếu dừng lại ngay khi gặp B lần đầu, nó tạo nên cung tô đậm trên hình 41a), nếu nó dừng lại sau khi quay một vòng rồi đi tiếp gặp B lần thứ hai nó tạo nên cung tô đậm trên hình 41b),...

Khi M di động theo chiều ngược lại, nó tạo nên cung tô đậm trên hình 41d) nếu nó dừng lại khi gặp B lần đầu,...

Mỗi lần điểm M di động trên đường tròn định hướng luôn theo một chiều (âm hoặc dương) từ điểm A và dừng lại ở điểm B, ta được một cung lượng giác điểm đầu A điểm cuối B. Như vậy

> *Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng ta có vô số cung lượng giác điểm đầu A, điểm cuối B. Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là* $\overset{\frown}{AB}$.

CHÚ Ý

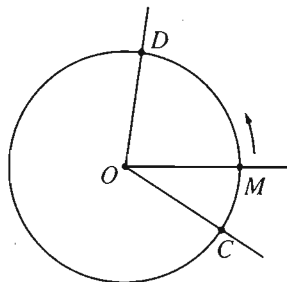
Trên một đường tròn định hướng, lấy hai điểm A và B thì

Kí hiệu $\overset{\frown}{AB}$ chỉ một cung hình học (cung lớn hoặc cung bé) hoàn toàn xác định.

Kí hiệu $\overset{\curvearrowright}{AB}$ chỉ một cung lượng giác điểm đầu A, điểm cuối B.

2. Góc lượng giác

Trên đường tròn định hướng cho một cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{CD}$ (h.42). Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C tới D tạo nên cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{CD}$ nói trên. Khi đó tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC tới vị trí OD. Ta nói tia OM tạo ra một ***góc lượng giác***, có tia đầu là OC, tia cuối là OD. Kí hiệu góc lượng giác đó là (OC, OD).

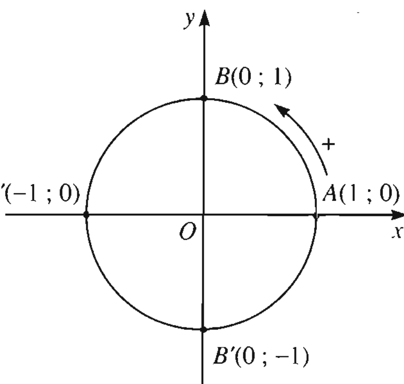


Hình 42

3. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R = 1$ (h.43).

Đường tròn này cắt hai trục toạ độ tại bốn điểm $A(1 ; 0)$, $A'(-1 ; 0)$, $B(0 ; 1)$, $B'(0 ; -1)$. Ta lấy $A(1 ; 0)$ làm điểm gốc của đường tròn đó.



Hình 43

Đường tròn xác định như trên được gọi là ***đường tròn lượng giác (gốc A)***.

II – SỐ ĐO CỦA CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

1. Độ và rađian

a) Đơn vị rađian

Đơn vị độ đã được sử dụng để đo góc từ rất lâu đời. Trong Toán học và Vật lí người ta còn dùng một đơn vị nữa để đo góc và cung, đó là rađian (đọc là ra-đi-an).

Trên hình 39 ta thấy độ dài cung nhỏ $\overset{\frown}{AM_1}$ bằng 1 đơn vị, tức là bằng độ dài bán kính. Ta nói số đo của cung $\overset{\frown}{AM_1}$ (hay số đo của góc ở tâm $\widehat{AOM_1}$) bằng 1 rađian (viết tắt là 1 rad). Tổng quát

*Trên đường tròn tuỳ ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là **cung có số đo 1 rad**.*

b) Quan hệ giữa độ và rađian

Ta biết độ dài cung nửa đường tròn là πR, nên trong hình 43 số đo của cung $\overset{\frown}{AA'}$ (hay góc bẹt $\widehat{AOA'}$) là π rad (vì $R = 1$). Vì góc bẹt có số đo độ là 180 nên ta viết $180^o = \pi$ rad.

Suy ra

$$1^o = \frac{\pi}{180} \text{ rad và } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o.$$

Với $\pi \approx 3{,}14$ thì $1^o \approx 0{,}01745$ rad và 1 rad $\approx 57^o17'45''$.

CHÚ Ý

Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị rađian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn cung $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là cung $\frac{\pi}{2}$ rad.

Bảng chuyển đổi thông dụng

Độ	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
Rađian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π


1

Sử dụng máy tính bỏ túi để đổi từ độ sang rađian và ngược lại.

Nếu dùng máy tính CASIO *fx–500MS* ta làm như sau

a) Đổi $35^o47'25''$ sang rađian

Ấn ba lần phím [MODE] rồi ấn [2] để màn hình hiện chữ [R]. Sau đó ấn liên tiếp

[3] [5] [°'''] [4] [7] [°'''] [2] [5] [°'''] [SHIFT]

[DRG ▶] [1] [=]

cho kết quả 0.6247 (đã làm tròn đến bốn chữ số thập phân).

b) Đổi 3 rad ra độ

Ấn ba lần phím [MODE] rồi ấn [1] để màn hình hiện chữ [D]. Sau đó ấn liên tiếp

[3] [SHIFT] [DRG ▶] [2] [=] [SHIFT] [°'"]

cho kết quả $171^o53'14"$ (đã làm tròn đến giây).

c) Độ dài của một cung tròn

Trên đường tròn bán kính R, cung nửa đường tròn có số đo là π rad và có độ dài là πR. Vậy

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài

$$\boxed{l = R\alpha.}$$

2. Số đo của một cung lượng giác

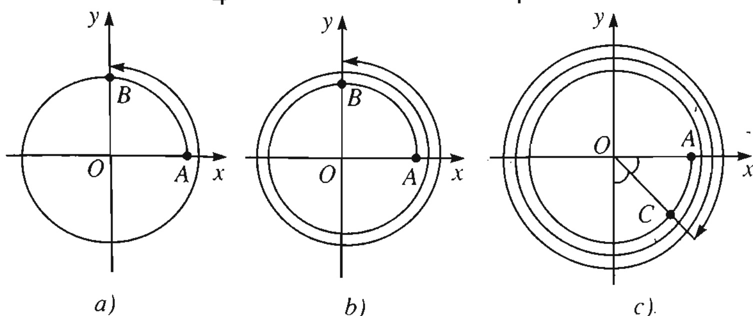
Ví dụ. Xét cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ trong hình 44a). Một điểm M di động trên đường tròn theo chiều dương. Khi M di động từ A đến B tạo nên cung $\frac{1}{4}$ đường tròn, ta nói cung này có số đo $\frac{\pi}{2}$, sau đó đi tiếp một vòng tròn nữa (thêm 2π), ta được cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ có số đo là $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$.

Tương tự, cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ trong hình 44b) có số đo là

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi + 2\pi = \frac{9\pi}{2}.$$

Cung lượng giác $\overset{\frown}{AC}$ trong hình 44c) lại có số đo là

$$-\frac{\pi}{4} - 2\pi - 2\pi - 2\pi = -\frac{25\pi}{4}.$$



Hình 44

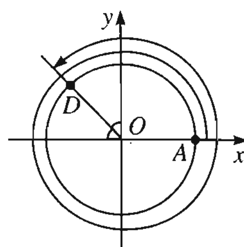
Từ các ví dụ nêu trong hình 44 ta thấy

Số đo của một cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ $(A \neq M)$ là một số thực, âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung $\overset{\frown}{AM}$ là sđ $\overset{\frown}{AM}$.


2

Cung lượng giác $\overset{\frown}{AD}$ (h.45) có số đo là bao nhiêu ?



Hình 45

GHI NHỚ

Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π. Ta viết

$$\text{sđ } \overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

trong đó α là số đo của một cung lượng giác tuỳ ý có điểm đầu là A và điểm cuối là M.

Khi điểm cuối M trùng với điểm đầu A ta có

$$\text{sđ } \overset{\frown}{AA} = k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

khi $k = 0$ thì sđ $\overset{\frown}{AA} = 0$.

Người ta cũng viết số đo bằng độ. Công thức tổng quát của số đo bằng độ của các cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ là

$$\text{sđ } \overset{\frown}{AM} = a^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$$

trong đó a° là số đo của một cung lượng giác tuỳ ý có điểm đầu là A và điểm cuối là M.

3. Số đo của một góc lượng giác

Ta định nghĩa

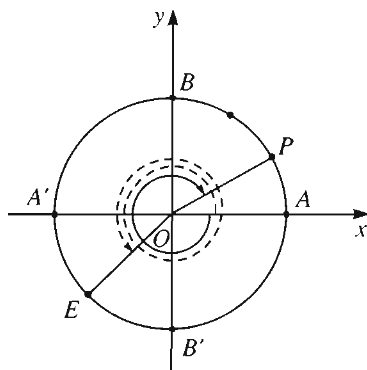
> ***Số đo của góc lượng giác*** *(OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\overset{\frown}{AC}$ tương ứng.*



3

Tìm số đo của các góc lượng giác (OA, OE) và (OA, OP) trên hình 46 (điểm E là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{A'B'}$, $\overset{\frown}{AP} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{AB}$).

Viết số đo này theo đơn vị rađian và theo đơn vị độ.



Hình 46

CHÚ Ý

Vì mỗi cung lượng giác ứng với một góc lượng giác và ngược lại, đồng thời số đo của các cung và góc lượng giác tương ứng là trùng nhau, nên từ nay về sau khi ta nói về cung thì điều đó cũng đúng cho góc và ngược lại.

4. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn điểm gốc $A(1 ; 0)$ làm điểm đầu của tất cả các cung lượng giác trên đường tròn lượng giác. Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối M của cung này. Điểm cuối M được xác định bởi hệ thức sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

Ví dụ. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các cung lượng giác có số đo lần lượt là

a) $\frac{25\pi}{4}$; b) -765°.

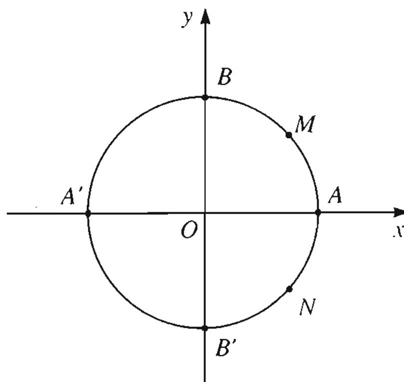
Giải

a) $\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3.2\pi$.

Vậy điểm cuối của cung $\frac{25\pi}{4}$ là điểm chính giữa M của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ (h.47).

b) $-765^{\circ} = -45^{\circ} + (-2).360^{\circ}$.

Vậy điểm cuối của cung -765° là điểm chính giữa N của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB'}$ (h.47).



Hình 47

Bài tập

1. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo khác nhau trên đường tròn lượng giác, có thể xảy ra trường hợp các điểm cuối của chúng trùng nhau không ? Khi nào trường hợp này xảy ra ?

2. Đổi số đo của các góc sau đây rả rađian

   a) 18^o; b) $57^o30'$;

   c) -25^o; d) $-125^o45'$.

3. Đổi số đo của các cung sau đây ra độ, phút, giây

   a) $\frac{\pi}{18}$; b) $\frac{3\pi}{16}$;

   c) -2; d) $\frac{3}{4}$.

4. Một đường tròn có bán kính 20cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo

   a) $\frac{\pi}{15}$; b) 1,5 ; c) 37^o.

5. Trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các cung có số đo

   a) $-\frac{5\pi}{4}$; b) 135^o;

   c) $\frac{10\pi}{3}$; d) -225^o.

6. Trên đường tròn lượng giác gốc A, xác định các điểm M khác nhau, biết rằng cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo tương ứng là (trong đó k là một số nguyên tuỳ ý)

   a) $k\pi$; b) $k\frac{\pi}{2}$; c) $k\frac{\pi}{3}$.

7. Trên đường tròn lượng giác cho điểm M xác định bởi sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là điểm đối xứng của M qua trục Ox, trục Oy và gốc toạ độ. Tìm số đo của các cung $\overset{\frown}{AM_1}, \overset{\frown}{AM_2}, \overset{\frown}{AM_3}$.

§2 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

I – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CUNG α


1

Nhắc lại khái niệm giá trị lượng giác của góc α, $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$.

Ta có thể mở rộng khái niệm giá trị lượng giác cho các cung và góc lượng giác.

1. Định nghĩa

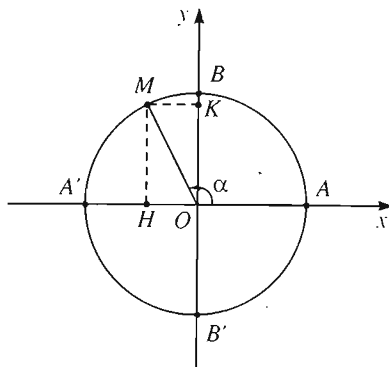
Trên đường tròn lượng giác cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ (còn viết $\overset{\frown}{AM} = \alpha$) (h.48).

Tung độ $y = \overline{OK}$ của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin\alpha$.

$$\boxed{\sin\alpha = \overline{OK}.}$$

Hoành độ $x = \overline{OH}$ của điểm M gọi là côsin của α và kí hiệu là $\cos\alpha$.

$$\boxed{\cos\alpha = \overline{OH}.}$$



Hình 48

Nếu $\cos\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan\alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu $\mathrm{tg}\,\alpha$)

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.}$$

Nếu $\sin\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là côtang của α và kí hiệu là $\cot\alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu $\mathrm{cotg}\,\alpha$)

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.}$$

*Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các **giá trị lượng giác của cung** α.*

*Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục côsin.***

CHÚ Ý

1. Các định nghĩa trên cũng áp dụng cho các góc lượng giác.

2. Nếu $0^{o} \leq \alpha \leq 180^{o}$ thì các giá trị lượng giác của góc α chính là các giá trị lượng giác của góc đó đã nêu trong SGK Hình học 10.



Tính $\sin\frac{25\pi}{4}$, $\cos(-240^{o})$, $\tan(-405^{o})$.

2. Hệ quả

1) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, ta có

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha, \ \forall k \in \mathbb{Z};\\&\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha, \ \forall k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}}$$

2) Vì $-1 \leq \overline{OK} \leq 1$; $-1 \leq \overline{OH} \leq 1$ (h.48) nên ta có

$$\boxed{\begin{aligned}&-1 \leq \sin\alpha \leq 1\\&-1 \leq \cos\alpha \leq 1.\end{aligned}}$$

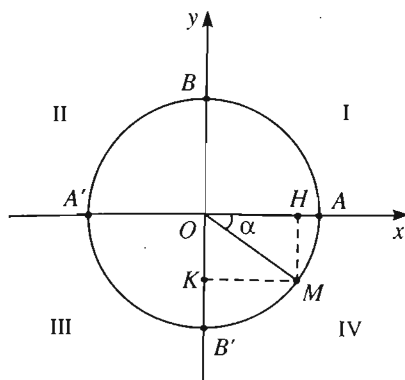
3) Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mà $-1 \leq m \leq 1$ đều tồn tại α và β sao cho $\sin\alpha = m$ và $\cos\beta = m$.

4) $\tan\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Thật vậy, $\tan\alpha$ không xác định khi và chỉ khi $\cos\alpha = 0$, tức là điểm cuối M của cung $\overset{\frown}{AM}$ trùng với B hoặc B' (h.48), hay $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

5) $\cot\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Lập luận tương tự 4).

6) Dấu của các giá trị lượng giác của góc α phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác (h.49).



Hình 49

Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

Giá trị lượng giác \ Góc phần tư	I	II	III	IV
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot\alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

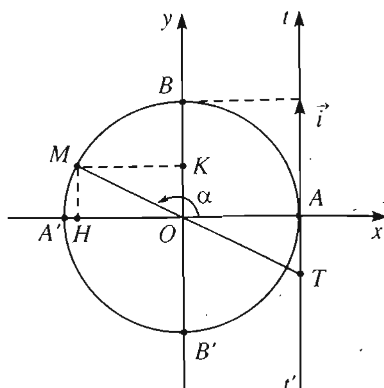
II – Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA TANG VÀ CÔTANG


3
Từ định nghĩa của $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, hãy phát biểu ý nghĩa hình học của chúng.

1. Ý nghĩa hình học của $\tan\alpha$

Từ A vẽ tiếp tuyến $t'At$ với đường tròn lượng giác. Ta coi tiếp tuyến này là một trục số bằng cách chọn gốc tại A và vectơ đơn vị $\vec{i} = \overrightarrow{OB}$.

Cho cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ có số đo là α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$). Gọi T là giao điểm của OM với trục $t'At$ (h.50).



Hình 50

Giả sử T không trùng với A. Vì $MH \parallel AT$, ta có $\frac{AT}{HM} = \frac{OA}{OH}$. Từ đó suy ra

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OH}}. \qquad (1)$$

Vì $\overline{HM} = \sin\alpha$, $\overline{OH} = \cos\alpha$ và $\overline{OA} = 1$ nên từ (1) suy ra

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\overline{HM}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT}.$$

Khi T trùng A thì $\alpha = k\pi$ và $\tan\alpha = 0$. Vậy

$$\boxed{\tan\alpha = \overline{AT}.}$$

*$\tan\alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AT}$ trên trục t'At. Trục t'At được gọi là **trục tang**.*

2. Ý nghĩa hình học của $\cot\alpha$

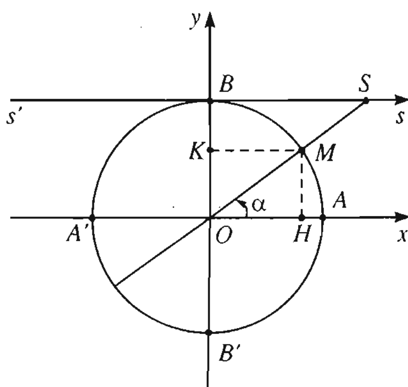
Từ B vẽ tiếp tuyến $s'Bs$ với đường tròn lượng giác và xác định trên tiếp tuyến này một trục có gốc tại B và vectơ đơn vị bằng $\overrightarrow{OA}$.

Cho cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ có số đo là α ($\alpha \neq k\pi$).

Gọi S là giao điểm của OM và trục $s'Bs$ (h.51).

Lí luận tương tự mục trên, ta có

$$\boxed{\cot\alpha = \overline{BS}.}$$



Hình 51

*$\cot\alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{BS}$ trên trục s'Bs. Trục s'Bs được gọi là **trục côtang**.*


4

Từ ý nghĩa hình học của $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ hãy suy ra với mọi số nguyên k,

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha,\ \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha.$$

III – QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

1. Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	
$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$,	$\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$,	$\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\tan\alpha \,.\, \cot\alpha = 1$,	$\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.


5

Từ định nghĩa của $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ hãy chứng minh hằng đẳng thức đầu tiên, từ đó suy ra các hằng đẳng thức còn lại.

2. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1. Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos\alpha$.

Giải. Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \dfrac{16}{25}$, do đó $\cos\alpha = \pm\dfrac{4}{5}$.

Vì $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên điểm cuối của cung α thuộc cung phần tư thứ II, do đó $\cos\alpha < 0$.

Vậy $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

Ví dụ 2. Cho $\tan\alpha = -\dfrac{4}{5}$, với $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

Giải. Ta có

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{16}{25}} = \frac{25}{41}$$

suy ra $\cos\alpha = \frac{\pm 5}{\sqrt{41}}$.

Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên điểm cuối của cung α nằm ở cung phần tư thứ IV, do đó $\cos\alpha > 0$. Vậy $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

Từ đó $\sin\alpha = \tan\alpha \,.\, \cos\alpha = -\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{41}} = -\frac{4}{\sqrt{41}}$.

Ví dụ 3. Cho $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh rằng $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos^3\alpha} = \tan^3\alpha + \tan^2\alpha + \tan\alpha + 1$.

Giải. Vì $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ nên $\cos\alpha \neq 0$, do đó cả hai vế của đẳng thức cần chứng minh đều có nghĩa. Ta có

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= (1+\tan^2\alpha)(1+\tan\alpha)$$

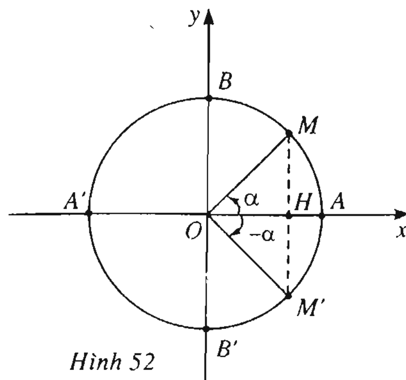
$$= \tan^3\alpha + \tan^2\alpha + \tan\alpha + 1.$$

3. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

*1) **Cung đối nhau :*** α và $-\alpha$.

Các điểm cuối của hai cung $\alpha = \overset{\frown}{AM}$ và $-\alpha = \overset{\frown}{AM'}$ đối xứng nhau qua trục hoành (h.52), nên ta có

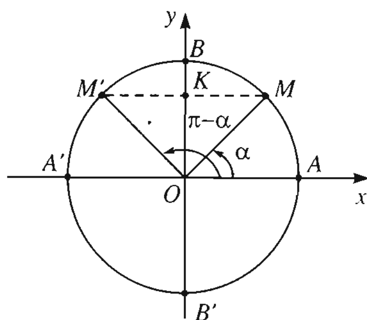
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$.



Hình 52

*2) **Cung bù nhau :*** α và $\pi - \alpha$.

Các điểm cuối của hai cung $\alpha = \overset{\frown}{AM}$ và $\pi - \alpha = \overset{\frown}{Am'}$ đối xứng nhau qua trục tung (h.53), nên ta có

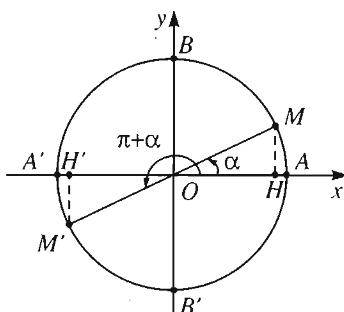


Hình 53

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$

*3) **Cung hơn kém π :*** α và $(\alpha + \pi)$.

Các điểm cuối của hai cung α và $(\alpha + \pi)$ đối xứng nhau qua gốc toạ độ O (h.54), nên ta có



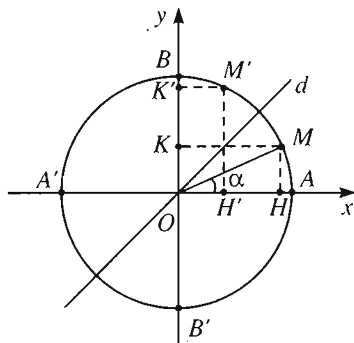
Hình 54

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha.$$

*4) **Cung phụ nhau :*** α và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Các điểm cuối của hai cung α và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ đối xứng nhau qua phân giác d của góc xOy (h.55), nên ta có

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$$



Hình 55



Tính $\cos\left(-\dfrac{11\pi}{4}\right)$, $\tan\dfrac{31\pi}{6}$, $\sin(-1380^{\circ})$.

Bài tập

1. Có cung α nào mà $\sin\alpha$ nhận các giá trị tương ứng sau đây không ?

a) $-0{,}7$; b) $\dfrac{4}{3}$; c) $-\sqrt{2}$; d) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

2. Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không ?

a) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ và $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

b) $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$ và $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$;

c) $\sin\alpha = 0{,}7$ và $\cos\alpha = 0{,}3$.

3. Cho $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác

a) $\sin(\alpha - \pi)$; b) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

c) $\tan(\alpha + \pi)$; d) $\cot\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Tính các giá trị lượng giác của góc α, nếu

a) $\cos\alpha = \dfrac{4}{13}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; b) $\sin\alpha = -0{,}7$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

c) $\tan\alpha = -\dfrac{15}{7}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; d) $\cot\alpha = -3$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

5. Tính α, biết

a) $\cos\alpha = 1$; b) $\cos\alpha = -1$;

c) $\cos\alpha = 0$; d) $\sin\alpha = 1$;

e) $\sin\alpha = -1$; f) $\sin\alpha = 0$.

§3 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I – CÔNG THỨC CỘNG

Công thức cộng là những công thức biểu thị $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$, $\cot(a \pm b)$ qua các giá trị lượng giác của các góc a và b. Ta có

$$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}.$$

Với điều kiện là các biểu thức đều có nghĩa.

Ta thừa nhận công thức đầu. Từ công thức đó có thể chứng minh dễ dàng các công thức còn lại. Chẳng hạn

$$\cos(a + b) = \cos[a - (-b)] = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b)$$

$$= \cos a\cos b - \sin a\sin b.$$

$$\sin(a - b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$$

$$= \sin a\cos b - \cos a\sin b.$$


1
Hãy chứng minh công thức $\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.

Ví dụ 1. Tính $\tan\frac{13\pi}{12}$.

Giải. Ta có

$$\tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) = \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}.$$

Giải. Ta có

$$\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\sin a\cos b - \cos a\sin b}.$$

Chia cả tử và mẫu của vế phải cho $\cos a\cos b$, ta được điều phải chứng minh.

II – CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

Cho $a = b$ trong các công thức cộng ta được các *công thức nhân đôi* sau.

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a.$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

Từ các công thức nhân đôi suy ra các công thức

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}.$$

Các công thức này gọi là các *công thức hạ bậc.*

Ví dụ 1. Biết $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$, tính $\sin 2a$.

Giải. Ta có $1 = \sin^2 a + \cos^2 a = (\sin a + \cos a)^2 - 2\sin a\cos a$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sin 2a.$$

Suy ra $\sin 2a = -\frac{3}{4}$.

Ví dụ 2. Tính $\cos\frac{\pi}{8}$.

Giải. Ta có $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$.

Suy ra $2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Vì $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ nên suy ra $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

III – CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG, TỔNG THÀNH TÍCH

1. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

Các công thức trên được gọi là các *công thức biến đổi tích thành tổng.*


2

Từ các công thức cộng, hãy suy ra các công thức trên.

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức

$$A = \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8};\ B = \sin\frac{13\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}.$$

Giải. Ta có

$$A = \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$B = \sin\frac{13\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{24} - \frac{5\pi}{24}\right) - \cos\left(\frac{13\pi}{24} + \frac{5\pi}{24}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}.$$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích


3

Bằng cách đặt $u = a - b$, $v = a + b$, hãy biến đổi $\cos u + \cos v$, $\sin u + \sin v$ thành tích.

Ta gọi các công thức sau đây là các *công thức biến đổi tổng thành tích*

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính

$$A = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}.$$

Giải. Ta có

$$A = \left(\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\right) + \cos\frac{5\pi}{9}$$

$$= 2\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{9}\right)$$

$$= \cos\frac{4\pi}{9} - \cos\frac{4\pi}{9} = 0.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Giải. Trong tam giác ABC ta có $A + B + C = \pi$.

Từ đó suy ra $\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$.

Vì vậy, $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$, $\sin\dfrac{C}{2} = \cos\dfrac{A+B}{2}$.

Bây giờ ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Bài tập

1. Tính

a) $\cos 225^{\circ}$, $\sin 240^{\circ}$, $\cot(-15^{\circ})$, $\tan 75^{\circ}$;

b) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\tan\dfrac{13\pi}{12}$.

2. Tính

a) $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\tan\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, biết

$$\sin a = \frac{4}{5},\ 0^o < a < 90^o \text{ và } \sin b = \frac{2}{3},\ 90^o < b < 180^o.$$

3. Rút gọn các biểu thức

a) $\sin(a + b) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b)$.

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - a\right) + \dfrac{1}{2}\sin^2 a$

c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b)$.

4. Chứng minh các đẳng thức

a) $\dfrac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \dfrac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}$.

b) $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$.

c) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$.

5. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, biết

a) $\sin a = -0{,}6$ và $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$.

b) $\cos a = -\dfrac{5}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$.

c) $\sin a + \cos a = \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{3\pi}{4} < a < \pi$.

6. Cho $\sin 2a = -\dfrac{5}{9}$ và $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$.

Tính $\sin a$ và $\cos a$.

7. Biến đổi thành tích các biểu thức sau

a) $1 - \sin x$; b) $1 + \sin x$;

c) $1 + 2\cos x$; d) $1 - 2\sin x$.

8. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

1. Hãy nêu định nghĩa của $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ và giải thích vì sao ta có

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha \,;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha \,;\; k \in \mathbb{Z}.$$

2. Nêu định nghĩa của $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ và giải thích vì sao ta có

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha,\; k \in \mathbb{Z} \;;$$

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha,\; k \in \mathbb{Z}.$$

3. Tính

a) $\sin\alpha$, nếu $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) $\cos\alpha$, nếu $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

c) $\tan\alpha$, nếu $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

d) $\cot\alpha$, nếu $\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4. Rút gọn các biểu thức

a) $\dfrac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; b) $\tan\alpha\left(\dfrac{1 + \cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)$;

c) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}$; d) $\dfrac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha}$.

5. Không sử dụng máy tính, hãy tính

a) $\cos\frac{22\pi}{3}$;

b) $\sin\frac{23\pi}{4}$;

c) $\sin\frac{25\pi}{3} - \tan\frac{10\pi}{3}$;

d) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

6. Không sử dụng máy tính, hãy chứng minh

a) $\sin 75^o + \cos 75^o = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

b) $\tan 267^o + \tan 93^o = 0$;

c) $\sin 65^o + \sin 55^o = \sqrt{3}\cos 5^o$;

d) $\cos 12^o - \cos 48^o = \sin 18^o$.

7. Chứng minh các đồng nhất thức

a) $\frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \cot x$;

b) $\frac{\sin x + \sin\frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$;

c) $\frac{2\cos 2x - \sin 4x}{2\cos 2x + \sin 4x} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

d) $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x\cos y}$.

8. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x

a) $A = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

b) $B = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;

c) $C = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;

d) $D = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}\cdot\cot x$.

Bài tập trắc nghiệm

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau

9. Giá trị $\sin \dfrac{47\pi}{6}$ là

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (D) $-\dfrac{1}{2}$.

10. Cho $\cos a = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ với $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$. Giá trị $\tan a$ là

(A) $\dfrac{-4}{\sqrt{5}}$; (B) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; (C) $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; (D) $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

11. Cho $a = \dfrac{5\pi}{6}$. Giá trị của biểu thức $\cos 3a + 2\cos(\pi - 3a)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - 1,5a\right)$ là

(A) $\dfrac{1}{4}$; (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (C) 0 ; (D) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

12. Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{2\cos^2\dfrac{\pi}{8} - 1}{1 + 8\sin^2\dfrac{\pi}{8}\cos^2\dfrac{\pi}{8}}$ là

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$; (C) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

13. Cho $\cot a = \dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $B = \dfrac{4\sin a + 5\cos a}{2\sin a - 3\cos a}$ là

(A) $\dfrac{1}{17}$; (B) $\dfrac{5}{9}$; (C) 13 ; (D) $\dfrac{2}{9}$.

14. Cho $\tan a = 2$. Giá trị của biểu thức $C = \dfrac{\sin a}{\sin^3 a + 2\cos^3 a}$ là

(A) $\dfrac{5}{12}$; (B) 1 ; (C) $-\dfrac{8}{11}$; (D) $-\dfrac{10}{11}$.

CHỈ DẪN LỊCH SỬ

Như mọi khoa học khác, Lượng giác phát sinh từ nhu cầu của đời sống. Sự phát triển của ngành Hàng hải đòi hỏi phải biết xác định vị trí của tàu bè ngoài biển khơi theo Mặt Trời lúc ban ngày và theo các vì sao lúc ban đêm. Các cuộc chiến tranh đòi hỏi phải biết xác định những khoảng cách lớn và lập những bản đồ. Người nông dân cần biết sự thay đổi của thời tiết trong năm để sản xuất cho kịp thời vụ, nên phải có lịch, v.v...

Các nhu cầu kể trên đã làm cho môn Lượng giác phát sinh và phát triển. Trước hết các nhà toán học Hy Lạp đã góp phần đáng kể vào việc phát triển môn Lượng giác và sau đó Ơ-le là người đã xây dựng Lí thuyết hiện đại về Hàm số lượng giác trong cuốn "Mở đầu về Giải tích các đại lượng vô cùng bé" xuất bản năm 1748.



L. Ơ-LE
(Leonhard Euler, 1707 – 1783)

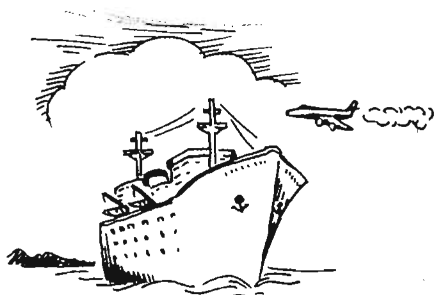
Ơ-LE

Ơ-le là một trong những nhà toán học lớn nhất từ xưa đến nay. Ông sinh tại Ba-lơ (Thuỵ Sĩ). Ông đã phát triển tất cả các ngành Toán học, từ những vấn đề rất cụ thể như đường tròn Ơ-le, cho tới những khái niệm hiện đại nhất nằm ở mũi nhọn của tiến bộ trong thời đại ông.

Ơ-le đã tiến hành nghiên cứu những đề tài khoa học rất đa dạng như Cơ học, Lí luận âm nhạc, Lí thuyết vẽ bản đồ địa lí, Khoa học hàng hải, các vấn đề về nước triều lên xuống, v.v... Ông thường bổ sung, hoàn bị những lí thuyết Toán học cũ, và nghiên cứu thêm những lí thuyết Toán học mới.

Trong cuộc đời mình, Ơ-le đã viết trên 800 công trình về Toán học, Thiên văn và Địa lí. Ông đã đặt cơ sở cho nhiều ngành Toán học hiện nay đang được dạy ở bậc đại học.

Ơ-le là người rất say mê và cần cù trong công việc. Ông không từ chối bất kì việc gì, dù khó đến đâu. Chẳng hạn, để giải một bài toán thiên văn, mà nhiều nhà toán học khác đòi hỏi một thời gian vài ba tháng, thì ông đã giải xong chỉ trong ba ngày. Do những cố gắng phi thường đó ông đã mắc bệnh và hỏng mất mắt phải. Về sau, ông bị mù cả hai mắt. Tuy thế, ông vẫn tiếp tục lao động sáng tạo và không ngừng cống hiến xuất sắc cho khoa học trong suốt 15 năm cuối đời mình.



Tên của Ơ-le được đặt cho một miệng núi lửa ở phần trông thấy được của Mặt Trăng.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I – Câu hỏi

1. Hãy phát biểu các khẳng định sau đây dưới dạng điều kiện cần và đủ

Tam giác ABC vuông tại A thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Tam giác ABC có các cạnh thoả mãn hệ thức $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì vuông tại A.

2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = -3x + 2$; b) $y = 2x^2$; c) $y = 2x^2 - 3x + 1$.

3. Phát biểu quy tắc xét dấu một nhị thức bậc nhất. Áp dụng quy tắc đó để giải bất phương trình

$$\frac{(3x-2)(5-x)}{(2-7x)} \geq 0.$$

4. Phát biểu định lí về dấu của một tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Áp dụng quy tắc đó, hãy xác định giá trị của m để tam thức sau luôn luôn âm.

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 1 - m.$$

5. Nêu các tính chất của bất đẳng thức. Áp dụng một trong các tính chất đó, hãy so sánh các số 2^{3000} và 3^{2000}.

6. a) Em hãy thu thập điểm trung bình học kì I về môn Toán của từng học sinh lớp mình.

b) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp để trình bày các số liệu thống kê thu thập được theo các lớp [0 ; 2), [2 ; 4), [4 ; 6), [6 ; 8), [8 ; 10].

7. Nêu các công thức biến đổi lượng giác đã học.

8. Nêu cách giải hệ hai bất phương trình bậc nhất hai ẩn và giải hệ

$$\begin{cases} 2x + y \geq 1 \\ x - 3y \leq 1. \end{cases}$$

II – Bài tập

1. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4} - \sqrt{-x^2 + 8x - 15}$.

a) Tìm tập xác định A của hàm số $f(x)$.

b) Giả sử $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 5\}$.

Hãy xác định các tập $A \setminus B$ và $\mathbb{R} \setminus (A \setminus B)$.

2. Cho phương trình

$$mx^2 - 2x - 4m - 1 = 0.$$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị $m \neq 0$, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm giá trị của m để -1 là một nghiệm của phương trình. Sau đó tìm nghiệm còn lại.

3. Cho phương trình

$$x^2 - 4mx + 9(m-1)^2 = 0.$$

a) Xét xem với giá trị nào của m, phương trình trên có nghiệm.

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho, hãy tính tổng và tích của chúng. Tìm một hệ thức giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

c) Xác định m để hiệu các nghiệm của phương trình bằng 4.

4. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $5(x-1) < x^5 - 1 < 5x^4(x-1)$, nếu $x - 1 > 0$;

b) $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geq 0$, biết rằng $x + y \geq 0$;

c) $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$,

biết rằng a, b, c cùng lớn hơn $-\dfrac{1}{4}$ và $a + b + c = 1$.

5. Giải hệ phương trình sau bằng cách đưa về hệ phương trình dạng tam giác

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 5y - z = 9 \\ 5x - 2y - 3z = -3. \end{cases}$$

6. a) Xét dấu biểu thức

$$f(x) = 2x(x+2) - (x+2)(x+1).$$

b) Lập bảng biến thiên và vẽ trong cùng một hệ toạ độ vuông góc các đồ thị của các hàm số sau

$$y = 2x(x+2) \qquad (C_1)$$

$$y = (x+2)(x+1) \qquad (C_2).$$

Tính toạ độ các giao điểm A và B của (C_1) và (C_2).

c) Tính các hệ số a, b, c để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị lớn nhất bằng 8 và đồ thị của nó đi qua A và B.

7. Chứng minh các hệ thức sau

a) $\dfrac{1-2\sin^2 a}{1+\sin 2a} = \dfrac{1-\tan a}{1+\tan a}$;

b) $\dfrac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \tan 3a$;

c) $\dfrac{\sin^4 a - \cos^4 a + \cos^2 a}{2(1-\cos a)} = \cos^2 \dfrac{a}{2}$; d) $\dfrac{\tan 2x \tan x}{\tan 2x - \tan x} = \sin 2x$.

8. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\dfrac{1+\sin 4a - \cos 4a}{1+\cos 4a + \sin 4a}$;

b) $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}\tan^2 \dfrac{a}{2} - \cos^2 a$;

c) $\dfrac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x}$.

9. Tính

a) $4(\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ)$.

b) $96\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{48}\cos\dfrac{\pi}{48}\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{6}$.

c) $\tan 9^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ$.

10. Rút gọn

a) $\cos\dfrac{x}{5}\cos\dfrac{2x}{5}\cos\dfrac{4x}{5}\cos\dfrac{8x}{5}$;

b) $\sin\dfrac{x}{7} + 2\sin\dfrac{3x}{7} + \sin\dfrac{5x}{7}$.

11. Chứng minh rằng trong một tam giác ABC ta có

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ ($\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ cùng khác $\dfrac{\pi}{2}$) ;

b) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$.

12. Không sử dụng máy tính, hãy tính

$$\frac{\sin 40^\circ - \sin 45^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 45^\circ + \cos 50^\circ} - \frac{6(\sqrt{3} + 3\tan 15^\circ)}{3 - \sqrt{3}\tan 15^\circ}.$$

ĐÁP SỐ

CHƯƠNG I

§1.

1. a) Mệnh đề ;
   b) Là mệnh đề chứa biến.
   c) Là mệnh đề chứa biến;
   d) Mệnh đề.

5. a) $\forall x \in \mathbb{R} : x.1 = x$;
   b) $\exists x \in \mathbb{R} : x + x = 0$;
   c) $\forall x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$.

7. a) $\exists n \in \mathbb{N} : n$ không chia hết cho n (đúng) ;
   b) $\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 \neq 2$ (đúng) ;
   c) $\exists x \in \mathbb{R} : x \geq x + 1$ (sai) ;
   d) $\forall x \in \mathbb{R} : 3x \neq x^2 + 1$ (sai).

§2.

1. a) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$;
   b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n(n + 1), 1 \leq n \leq 5\}$.

2. a) $A \subset B$ và $A \neq B$;
   b) $A = B$.

3. a) $\varnothing, \{a\}, \{b\}, A$;
   b) $\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, B$.

§3.

1. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{C, O, I, T, N, E\}$;
   $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{C, O, H, I, T, N, Ê, Ô, G, M, A, S, Ă, Y, K\}$;
   $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{H\}$;
   $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{Ô, G, M, A, S, Ă, Y, K\}$.

3. a) 25 ; b) 20.

4. $A \cap A = A$; $A \cup A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;
   $A \cup \varnothing = A$; $C_A A = \varnothing$; $C_A \varnothing = A$.

§4.

1. a) $[-3 ; 4]$; b) $[-1 ; 2]$;
   c) $(-2 ; +\infty)$; d) $[-1 ; 2)$;
   e) $(-\infty ; +\infty)$.

2. a) $[-1 ; 3]$; b) $\varnothing$;
   c) $\varnothing$; d) $[-2 ; 2]$.

3. a) $(-2 ; 1]$; b) $(-2 ; 1)$;
   c) $(-\infty ; 2]$; d) $(3 ; +\infty)$.

§5.

2. $l = 1745,3$.

3. a) $a = 3,141592654$;
   b) Với $b = 3,14$, $\Delta_b < 0,002$;
   với $c = 3,1416$, $\Delta_c < 0,0001$.

4. b) 51139,3736.

5. b) 0,0000127 ; c) –0,02400.

Ôn tập chương I

8. a) Đúng ; b) Sai.

9. $E \subset G \subset B \subset C \subset A$;
   $E \subset D \subset B \subset C \subset A$.

10. a) $A = \{-2, 1, 4, 7, 10, 13\}$;
    b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;
    c) $C = \{-1, 1\}$.

11. $P \Leftrightarrow T$; $R \Leftrightarrow S$; $Q \Leftrightarrow X$.

12. a) $(0 ; 7)$; b) $(2 ; 5)$; c) $[3, +\infty)$.

13. $a = 2{,}289$; $\Delta_a < 0{,}001$.
14. 347.
15. a) Đúng ; c) Đúng ; e) Đúng.
16. (A).
17. (B).

CHƯƠNG II

§1.

1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1 ; -3\}$;

c) $D = \left[-\frac{1}{2} ; 3\right]$.

2. $x = 3, y = 4$; $x = -1, y = -1$;

$x = 2, y = 3$.

3. a) M thuộc đồ thị ;

b) N không thuộc đồ thị ;

c) P thuộc đồ thị.

4. a) Hàm số chẵn ;

b) Không là hàm số chẵn, không là hàm số lẻ ;

c) Hàm số lẻ ;

d) Không là hàm số chẵn, không là hàm số lẻ.

§2.

2. a) $a = -5, b = 3$;

b) $a = -1, b = 3$; c) $a = 0, b = -3$.

3. a) $y = 2x - 5$; b) $y = -1$.

§3.

3. a) $y = 2x^2 + x + 2$;

b) $y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 2$;

c) $y = x^2 - 4x + 2$;

d) $y = x^2 - 3x + 2$ hoặc

$y = 16x^2 + 12x + 2$.

4. $a = 3, b = -36, c = 96$.

Ôn tập chương II

8. a) $D = [-3 ; +\infty) \setminus \{-1\}$;

b) $D = \left(-\infty ; \frac{1}{2}\right)$; c) $D = \mathbb{R}$.

11. $a = -1, b = 4$.

12. a) $a = 1, b = -1, c = -1$.

b) $a = -1, b = 2, c = 3$.

13. (C).

14. (D).

15. (B).

CHƯƠNG III

§1.

3. a) $x = 1$; b) $x = 2$;

c) $x = 3$; d) Vô nghiệm.

4. a) $x = 0$; b) $x = \frac{3}{2}$;

c) $x = 5$; d) Vô nghiệm.

§2.

1. a) $x = -\frac{23}{16}$; b) Vô nghiệm ;

c) $x = \frac{14}{3}$; d) $x = -\frac{1}{2}$.

2. a) $m \neq 3$ thì nghiệm là $x = \frac{2m+1}{m-3}$;

$m = 3$ phương trình vô nghiệm.

b) $m \neq 2$ và $m \neq -2$ thì nghiệm là

$x = \frac{3}{m+2}$;

$m = 2$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ là nghiệm ;

$m = -2$ phương trình vô nghiệm.

c) $m \neq 1$ thì nghiệm là $x = 1$.

$m = 1$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ là nghiệm.

3. 45 quả.

4. a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$;

$x_3 = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $x_4 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$;

b) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. b) $x_1 \approx -0{,}387$, $x_2 \approx 1{,}721$;

c) $x_1 = -1$, $x_2 \approx -1{,}333$;

d) $x_1 \approx 1{,}079$, $x_2 \approx -0{,}412$.

6. a) $x = -\frac{1}{5}$, $x = 5$;

b) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{7}$;

c) $x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{65}}{14}$;

d) $x_1 = 1$, $x_2 = -6$.

7. a) $x = 15$; b) $x = -1$;

c) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$; d) $x = 1$.

8. $m = 7 \Rightarrow x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4}{3}$.

$m = 3 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

§3.

2. a) $\left(\frac{11}{7}; \frac{5}{7}\right)$; b) $\left(\frac{9}{11}; \frac{7}{11}\right)$;

c) $\left(\frac{9}{8}; -\frac{1}{6}\right)$; d) $(2 ; 0{,}5)$.

3. Giá mỗi quả quýt là 800 đồng, giá mỗi quả cam là 1400 đồng.

4. Dây chuyền thứ nhất : 450 áo ;

Dây chuyền thứ hai : 480 áo.

5. a) $(x ; y ; z) = (1 ; 1 ; 2)$;

b) $(x ; y ; z) = \left(\frac{11}{14}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{7}\right)$.

6. Giá một áo là 98 000 đồng, giá một quần là 125 000 đồng, giá một váy là 86 000 đồng.

7. b) $(x ; y) \approx (0{,}11 ; 1{,}74)$;

d) $(x ; y ; z) \approx (-4{,}00 ; 1{,}57 ; 1{,}71)$.

Ôn tập chương III

3. a) $x = 6$; b) Vô nghiệm ;

c) $x = 2\sqrt{2}$; d) Vô nghiệm.

4. a) Vô nghiệm ; b) $x = -\frac{1}{9}$; c) $x = \frac{5}{2}$.

5. a) $(x ; y) = \left(\frac{37}{24}; \frac{29}{12}\right)$;

b) $(x ; y) = \left(2 ; \frac{3}{2}\right)$.

c) $(x ; y) = \left(\frac{34}{13}; \frac{1}{13}\right)$;

d) $(x ; y) = \left(\frac{93}{37}; \frac{30}{37}\right)$.

6. Người thứ nhất sơn xong sau 18 giờ, người thứ hai sơn xong sau 24 giờ.

7. a) $(x ; y ; z) = \left(-\frac{3}{5}; \frac{3}{2}; -\frac{13}{10}\right)$;

b) $(x ; y ; z) = \left(\frac{181}{43}; \frac{7}{43}; \frac{83}{43}\right)$.

8. Ba phân số đó là $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{6}$.

9. 432 sản phẩm.

10. Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba thì kết quả là

a) $x_1 \approx 1{,}520$; $x_2 \approx -0{,}920$;

b) $x_1 \approx -0{,}333$; $x_2 \approx -1{,}000$;

c) $x_1 \approx 0{,}741$; $x_2 \approx -6{,}741$;

d) $x_1 \approx -0{,}707$; $x_2 \approx -2{,}828$.

11. a) Vô nghiệm ;

b) $x_1 = -4$; $x_2 = -\frac{6}{5}$.

12. a) Chiều dài là 31,5cm, chiều rộng là 15,7m.

b) Chiều dài là 39,6cm, chiều rộng là 27,5m.

13. Người thứ nhất quét sân một mình hết 4 giờ, người thứ hai quét sân một mình hết 2 giờ.

14. (C) ; 15. (A) ; 16. (C) ; 17. (D).

CHƯƠNG IV

§1.

1. d)

2. Số C.

3. a) *HD*. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác nên

$$a + b - c > 0 ; b + c - a > 0 ; c + a - b > 0.$$

b) *HD*. Áp dụng a) có $(b-c)^2 < a^2$, $(c-a)^2 < b^2$, $(a-b)^2 < c^2$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức này.

4. *HD*. Xét hiệu

$$(x^3 + y^3) - (x^2y + xy^2).$$

6. *HD*. Gọi H là tiếp điểm của đường thẳng AB với đường tròn. Ta có

$$AB = HA + HB \geq 2\sqrt{HA.HB}.$$

§2.

1. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; -1\}$;

b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 ; 3 ; 2 ; -2\}$;

c) $x \neq -1$;

d) $x \in (-\infty ; 1] \setminus \{-4\}$.

4. a) $x < -\frac{11}{20}$; b) Vô nghiệm.

5. a) $x < \frac{7}{4}$; b) $\frac{7}{39} < x < 2$.

§3.

2. a) $\frac{1}{2} < x < 1$; $3 \leq x < +\infty$;

b) $x < -1$; $0 < x < 1$; $1 < x < 3$;

c) $-12 < x < -4$; $-3 < x < 0$;

d) $-1 < x < \frac{2}{3}$; $1 < x < +\infty$.

3. a) $x \leq -\frac{2}{5}$; $x \geq 2$;

b) $x < -5$; $-1 < x < 1$; $x > 1$.

§4.

3. Để có lãi cao nhất, xí nghiệp cần lập phương án sản xuất các sản phẩm I và II theo tỉ lệ 4 : 1.

§5.

1. a) $5x^2 - 3x + 1 > 0$, $\forall x$;

b) $-2x^2 + 3x + 5 > 0$ khi $-1 < x < \frac{5}{2}$;

$-2x^2 + 3x + 5 < 0$ khi $x < -1$

hoặc $x > \frac{5}{2}$;

c) $x^2 + 12x + 36 \geq 0$, $\forall x$;

d) $(2x - 3)(x + 5) < 0$ khi $-5 < x < \frac{3}{2}$.

$(2x-3)(x+5) > 0$ khi $x < -5$; $x > \frac{3}{2}$.

3. a) Vô nghiệm ;

b) $-1 \le x \le \frac{4}{3}$;

c) $x < -8$; $-2 < x < \frac{-4}{3}$; $1 < x < 2$;

d) $-2 \le x \le 3$.

4. a) $m < 1$; $m > 3$; b) $-\frac{3}{2} < m < -1$.

Ôn tập chương IV

1. a) $x > 0$; b) $y \ge 0$;

c) $|\alpha| \ge 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

d) $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, $\forall a \ge 0, b \ge 0$.

2. a) a, b cùng dấu ; b) a, b cùng dấu ;

c) a, b trái dấu ; d) a, b trái dấu.

3. (C).

4. Gọi P là khối lượng thực của vật. Ta có $26,35 < P < 26,45$.

5. a) $x = 1$; b) $x > 1$; c) $x < 1$.

6. *HD*. $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \ge 2$.

11. a) $f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ hoặc

$x > \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$;

$g(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1-\sqrt{3}$ hoặc

$0 < x < 2$ hoặc $x > 1 + \sqrt{3}$;

$g(x) < 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} < x < 0$ hoặc

$2 < x < 1+\sqrt{3}$.

b) Nghiệm nguyên của bất phương trình là $x = 2$; 3 ; 4 ... hoặc $x = -3$; -4...

12. *HD*. Xét dấu biệt thức

$$\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2.$$

14. (B) ; 15. (C) ; 16. (C) ; 17. (C).

CHƯƠNG V

§1.

2. b) 43,3% ; 56,7%

§3.

1. 1170 giờ ; 31 cm.

2. 6,1 điểm ; 5,2 điểm

Điểm trung bình cộng của lớp 10A cao hơn, nên có thể nói học sinh của lớp 10A có kết quả làm bài thi cao hơn.

3. Có hai mốt là

$M_o^{(1)} = 700$ nghìn đồng ;

$M_o^{(2)} = 900$ nghìn đồng.

4. Số trung vị $M_e = 720$ nghìn đồng.

5. 38,15 tạ/ha.

§4.

1. $s_x^2 \approx 120$; $s_x \approx 11$ giờ

$s_x^2 \approx 84$; $s_x \approx 9,2$ cm.

2. a) Dãy số liệu về điểm thi của lớp 10C có

$\overline{x} \approx 7,2$ điểm ; $s_x^2 \approx 1,3$; $s_x \approx 1,13$ điểm.

Dãy số liệu về điểm thi của lớp 10D có

$\overline{y} \approx 7{,}2$ điểm ; $s_y^2 \approx 0{,}8$; $s_y \approx 0{,}9$ điểm.

b) Điểm số của các bài thi ở lớp 10D đồng đều hơn.

3. a) Nhóm cá thứ 1 có $\overline{x} = 1$ kg ;

nhóm cá thứ 2 có $\overline{y} = 1$ kg ;

b) Nhóm cá thứ 1 có $s_x^2 = 0{,}042$;

nhóm cá thứ 2 có $s_y^2 = 0{,}064$;

c) Nhóm cá thứ 1 có khối lượng đồng đều hơn.

Ôn tập chương V

3. c) $\overline{x} \approx 2$ (con) ; $M_o = 2$ (con) ;

$M_e = 2$ (con).

4. e) Nhóm cá thứ 1 có $\overline{x} \approx 648$ (gam) ;

$s_x^2 \approx 33{,}2$; $s_x \approx 5{,}76$ (gam),

Nhóm cá thứ 2 có $\overline{y} \approx 647$ (gam) ;

$s_y^2 \approx 23{,}14$; $s_y \approx 4{,}81$ (gam),

Nhóm cá thứ 2 có khối lượng đồng đều hơn.

5. $\overline{x} = 34\,087\,500$ đồng ;

$M_e = 21\,045\,000$ đồng.

6. a) Mốt là mẫu 1.

7. (C) ; 8. (B) ; 9. (C) ; 10. (D) ; 11. (A).

CHƯƠNG VI

§1.

2. a) 0,3142 rad ; b) 1,0036 rad ;

c) −0,4363 rad ; d) −2,1948 rad.

3. a) 10° ; b) $33^\circ45'$;

c) $-114^\circ35'30''$; d) $42^\circ58'19''$.

4. a) 4,19 cm ; b) 30 cm ; c) 12,92 cm.

7. sđ $\overset{\frown}{AM_1} = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

sđ $\overset{\frown}{AM_2} = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

sđ $\overset{\frown}{AM_3} = \alpha + \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

§2.

4. a) $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{17}}{13}$; $\tan\alpha = \dfrac{3\sqrt{17}}{4}$;

$\cot\alpha = \dfrac{4}{3\sqrt{17}}$.

b) $\cos\alpha \approx -0{,}71$; $\tan\alpha \approx 0{,}99$;

$\cot\alpha \approx 1{,}01$.

c) $\cos\alpha = -\dfrac{7}{\sqrt{274}}$; $\sin\alpha = \dfrac{15}{\sqrt{274}}$;

$\cot\alpha = -\dfrac{7}{15}$.

d) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$;

$\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$; $\tan\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

5. a) $\alpha = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

b) $\alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$;

c) $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

d) $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

e) $\alpha = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

f) $\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

§3.

1. a) $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cot(-15^\circ) = -2-\sqrt{3}$;

$\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$.

b) $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$;

$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$;

$\tan\frac{13\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$.

2. a) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-1\right)$; b) $\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$;

c) $\cos(a+b) = -\frac{3\sqrt{5}+8}{15}$;

$\sin(a-b) = -\frac{6+4\sqrt{5}}{15}$.

3. a) $\sin a \sin b$;

b) $\frac{1}{2}\cos^2 a$;

c) $\cos a \sin b$.

5. a) $\sin 2a = 0{,}96$; $\cos 2a = 0{,}28$;

$\tan 2a \approx 3{,}43$

b) $\sin 2a = -\frac{120}{169}$; $\cos 2a = -\frac{119}{169}$;

$\tan 2a = \frac{120}{119}$.

c) $\sin 2a = -\frac{3}{4}$; $\cos 2a = \frac{\sqrt{7}}{4}$;

$\tan 2a = -\frac{3}{\sqrt{7}}$.

6. $\sin a = \frac{2+\sqrt{14}}{6}$, $\cos a = \frac{2-\sqrt{14}}{6}$ hoặc

$\sin a = \frac{\sqrt{14}-2}{6}$, $\cos a = -\frac{2+\sqrt{14}}{6}$.

7. a) $1-\sin x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

b) $1+\sin x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

c) $1+2\cos x = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$.

d) $1-2\sin x = 4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)$.

8. $A = \tan 3x$.

Ôn tập chương VI

3. a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; b) $-\frac{1}{3}$;

c) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$; d) $-\frac{1}{\sqrt{15}}$.

4. a) $\tan^2\alpha$; b) $2\cos\alpha$;

c) $-\cot\alpha$; d) $\sin\alpha$.

5. a) $-\frac{1}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. (D) ; 10. (B) ; 11. (C) ; 12. (D) ;
13. (C) ; 14. (B).

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I - Câu hỏi

3. $x \in \left(\frac{2}{7};\frac{2}{3}\right] \cup [5;\infty)$.

4. $m > \frac{17}{8}$.

5. $3^{2000} > 2^{3000}$.

Vì $2^3 < 3^2 \Rightarrow (2^3)^{1000} < (3^2)^{1000}$.

II - Bài tập

1. a) $[3 ; 5]$.

   b) $A \setminus B = [3 ; 4]$,

   $\mathbb{R} \setminus (A \setminus B) = (-\infty ; 3) \cup (4 ; \infty)$.

2. b) $m = \frac{1}{3}$, $x_2 = 7$.

3. a) $\frac{3}{5} \leq m \leq 3$.

   b) $S = x_1 + x_2 = 4m$,

   $P = x_1 x_2 = 9(m-1)^2$;

   $9(x_1 + x_2 - 4)^2 - 16x_1 x_2 = 0$.

   c) $m = 1$ hoặc $m = \frac{13}{5}$.

5. $(x ; y ; z) = (-1 ; 2 ; -2)$.

6. a) $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty ; -2) \cup (1 ; \infty)$

   $f(x) < 0$ khi $x \in (-2 ; 1)$.

   b) $A(-2 ; 0)$, $B(1 ; 6)$.

   c) $a = -2$; $b = 0$; $c = 8$;

   hoặc $a = \frac{-2}{9}$; $b = \frac{16}{9}$; $c = \frac{40}{9}$.

8. a) $\tan 2a$;

   b) $\sin^2 a$.

   c) $\tan(x - 15^\circ)\cot(x + 15^\circ)$.

9. a) 2 ; b) 9 ; c) 4.

10. a) $\dfrac{\sin\frac{16x}{5}}{16\sin\frac{x}{5}}$; b) $4\sin\frac{3x}{7}\cos^2\frac{x}{7}$.

12. -5.

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

MỤC LỤC

Trang


HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH



VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 10

1. TOÁN HỌC
   - ĐẠI SỐ 10
   - HÌNH HỌC 10
2. VẬT LÍ 10
3. HOÁ HỌC 10
4. SINH HỌC 10
5. NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai)
6. LỊCH SỬ 10
7. ĐỊA LÍ 10
8. TIN HỌC 10
9. CÔNG NGHỆ 10
10. GIÁO DỤC CÔNG DÂN 10
11. GIÁO DỤC QUỐC PHÒNG - AN NINH 10
12. NGOẠI NGỮ
    - TIẾNG ANH 10
    - TIẾNG PHÁP 10
    - TIẾNG NGA 10
    - TIẾNG TRUNG QUỐC 10

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 10 - NÂNG CAO

Ban Khoa học Tự nhiên :
- TOÁN HỌC (ĐẠI SỐ 10, HÌNH HỌC 10)
- VẬT LÍ 10
- HOÁ HỌC 10
- SINH HỌC 10

Ban Khoa học Xã hội và Nhân văn :
- NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai)
- LỊCH SỬ 10
- ĐỊA LÍ 10
- NGOẠI NGỮ (TIẾNG ANH 10, TIẾNG PHÁP 10, TIẾNG NGA 10, TIẾNG TRUNG QUỐC 10)


8 934980 005507



Giá: 7.100đ